中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

(鄉土)教材獎

080412

賠錢+賠錢=賺錢？探討帕隆多悖論的成立條件及在多賽局中發生的可能性

學校名稱： 金門縣金城鎮中正國民小學

作者：	指導老師：
小六 許嚴丰 小六 莊碩齊 小六 許智 小六 林冬宸 小五 謝昀恩	徐瑄廷 洪曙天

關鍵詞： 帕隆多悖論、期望值、 機率

作品名稱：賠錢+賠錢=賺錢？ 探討帕隆多悖論的成立條件及在多賽局中發生的可能性

摘要

本研究旨在探討「帕隆多悖論」，將兩個容易賠錢的賽局(遊戲 A 與 B 遊戲)合在一起進行，卻能變成容易賺錢的賽局(遊戲 C)，這是違反常人直覺的現象，因此我們想探究其中的機制、原因和成立條件。

我們以「執行遊戲 A 和 B 之特殊組合」、「執行遊戲 A 和 B 之機率」和「遊戲 A 和 B 的賺錢機率」為實驗變項，應用 Excel 和 Scratch 模擬各情況之期望值，來探討帕隆多悖論成立的條件。最後，將研究發現結合專家訪談，找出在市場機制中的實際案例。

發現遊戲執行組合的影響最為關鍵，而且在執行遊戲 A 的機率為 41%時會有最高的期望值。最後，我們找出帕隆多悖論在三種以上賽局成立的情形與必要條件，也歸納出各變項對於獲利影響程度差異及賺錢的關鍵週期。

壹、 前言

一、研究動機

(一)《數學謎題大圖鑑》中有趣的謎題

在《數學謎題大圖鑑》書籍中，有一道題目，規則及結果如下：遊戲 A 的規則，擲一枚硬幣，若擲出正面，對手要給你 1 元；如果是反面，你就要給對手 1 元。硬幣擲出正面的機率為 49.5%，擲出反面的機率為 50.5%。遊戲 B 的規則，擲一枚硬幣，若擲出正面，對手要給你 1 元；如果是反面，你就要給對手 1 元。這個遊戲使用的硬幣比較特殊，當你持有的金額為 3 的倍數時，擲出正面的機率是 9.5%，擲出反面的機率是 90.5%，是個「較可能輸的硬幣」；不過當你持有的金額非 3 的倍數時，擲出正面的機率為 74.5%，擲出反面的機率為 25.5%，是個「較可能贏的硬幣」。若只玩遊戲 A，你的持有金額會逐漸減少，同樣地，只玩遊戲 B 的話，持有金額也會持續減少。不過，如果 A、B 兩個遊戲交替進行，持有金額卻會持續增加。兩個高機率會輸的遊戲，組合在一起後，卻變成高機率贏的遊戲。

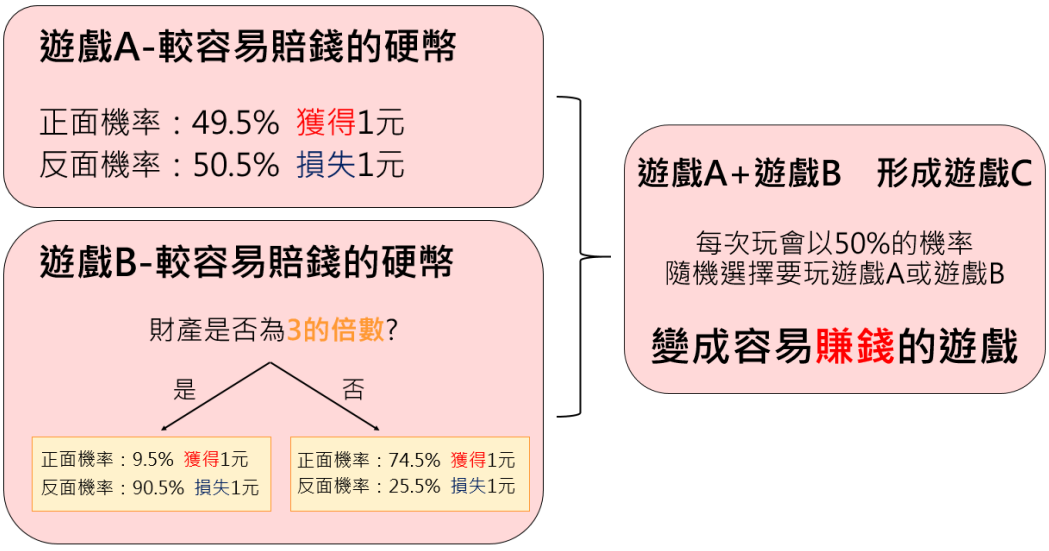


圖 1-1 帕隆多悖論遊戲規則(作者參考原始規則用 PPT 繪製而成)

(二) 國內缺少「帕隆多悖論」之相關研究

透過搜尋引擎輸入「帕隆多悖論科展」，皆無符合的結果，顯示目前

相關研究較少，尚有許多空間能探討。此規則及機制造成的現象違反直覺，有許多設定及變項都值得釐清，我們希望能找出其中的奧秘，並成為這項研究在臺灣得先驅。

二、研究問題與目的

研究目的一：探討帕隆多悖論發生的原因。

研究問題 1-1 為何遊戲 A 是較容易輸的賽局？ 如何用數學解釋？

研究問題 1-2 為何遊戲 B 是較容易輸的賽局？ 如何用數學解釋？

研究問題 1-3 為何遊戲 A 和 B 兩個較容易輸的賽局一起進行，形成的遊戲 C，卻是一個較容易贏的賽局？ 如何用數學解釋？

研究目的二：調整各賽局的機率變項，探討帕隆多悖論成立的條件。

研究問題 2-1 若調整執行「遊戲 A 和遊戲 B 之組合」，對期望值有什麼影響？

研究問題 2-2 若調整「執行遊戲 A 和遊戲 B 的機率」，對期望值有什麼影響？

研究問題 2-3 若調整「遊戲 A 和遊戲 B 的賺賠機率」，對期望值有什麼影響？

研究問題 2-4 哪個變項對期望值的影響最大？ 變項間彼此有什麼關聯？

研究目的三：探討帕隆多悖論在「三種以上賽局」一起進行時發生的可能性。

研究問題 3-1 帕隆多悖論是否會在「三種以上賽局」一起進行時發生？

研究問題 3-2 帕隆多悖論在多賽局一起進行時發生的的條件為何？

三、文獻回顧

（本研究中每張圖片皆為作者用 PPT、Excel、Scratch 和 gitmind 繪製而成）

帕隆多悖論於 1996 年，由 Juan Parrondo 發現。將其結果解釋為生物由多種失敗策略的組合，能得到成功的生存策略。以及多種賠錢的投資，有可能組合成賺錢的投資。

（一）帕隆多悖論在數學中的研究

當兩個期望值分別為負的博弈，能通過隨機或確定的方式組合產生總

體結果為正的期望值。「Parrondo’s Paradox：new results and new ideas」資料中，國外的研究者嘗試調整「執行遊戲 A 與遊戲 B 之機率」，觀察財產的變化，找出獲利更高的方式。**我們認為除了這個變項以外，還有「執行遊戲 A 和 B 之機率」、「遊戲 A 的賺賠機率」和「遊戲 B 的賺賠機率」。**

（二）期望值

在現實生活中，我們免不了會遇到一些有關機率的問題，例如：丟一骰子大約會出現多少點？買一張彩券大約會中多少錢？人的壽命大約是多少？得某種病後大約尚可活多少年？

對一隨機現象，我們常想粗略地知道其值究竟多大？期望值就是常被拿來扮演這種以一單一的值，來代表一隨機現象中之變數大小的角色。

其定義為，設 S 為一樣本空間，期對應的機率分別為 $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots\ldots, p(\omega_n)$。又設 X 為 S 上之一實數值函數，即 S 中每一樣本點 ω_i，皆對應一個值 $X(\omega_i)$，則下列和 $E(X) = X(\omega_1)P(\omega_1) + X(\omega_2)P(\omega_2) + \cdots\ldots + X(\omega_n)P(\omega_n) = \sum_{\omega \epsilon S} X(\omega)P(\omega)$ 稱為 X 的數學期望值，簡稱期望值。

（三）Youtuber 譯人豆奶-陳朕疆影片「賠錢+賠錢=賺錢？—帕隆多悖論」

上網搜尋帕隆多悖論，找不到相關科展研究的紀錄，不過，我們有找到 Youtuber 譯人豆奶-陳朕疆的影片，陳朕疆剛好也是《數學謎題大圖鑑》的譯者。他透過 Excel 的函數模擬進行 10000 次遊戲的財產變化，發現遊戲 A 及遊戲 B 分開進行時，都是較容易賠錢的遊戲，將兩者合在一起，各以 50%的執行機率進行，會變成較容易賺錢的遊戲。

從這部影片中讓我們得到啟發，想模擬進行數次遊戲後的期望值，用數學來解釋這個現象。**不使用財產變化的原因，是考量每次執行遊戲的機率是皆是獨立事件，可能會受到極端值影響，像是影片中雖然說遊戲 A 是較容易賠錢的遊戲，但在模擬財產時出現了賺錢的結果。**圖 1-2 是我們舉出的例子，用期望值是較好的判斷方式。

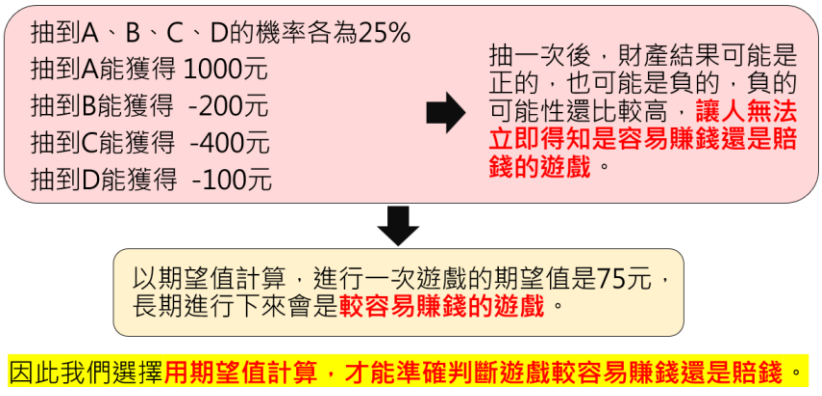


圖 1-2　使用期望值判斷之原因說明圖(作者用 PPT 繪製而成)

（四）歷屆科展相關研究

表 1-1　歷屆科展相關研究重點表

屆別	題目	研究焦點	研究設計與方法
63 屆	你比多少人幸運？以機率累積函數破解抽獎次數中位數錯覺	使用大數據模擬，回推理論值，證明抽卡次數之平均數非中位數。	設定 Scratch 程式及設計不同變數，判斷樣本數分布情形與密集程度。
61 屆	發財夢！SCRATCH 隨機 VS 有跡	使用 Scratch 模擬樂透開獎及抽中各個獎項的次數，分析隨機性的概念。	設定 Scratch 程式，統計到達不同結果所花的次數，並計算其機率。

本研究參考機率相關研究，將大數據平均後能讓結果非常接進理論值，對於國小生是較直觀及較好操作的方式，故預計使用 Scratch 程式與 Excel 輔助，再搭配不同的變數及條件，計算出各項遊戲進行之期望值。

表 1-2　本研究與課程相關單元表

本研究與課程相關單元				
數學	康軒版	五下	第八單元	比率與百分率
數學	康軒版	六上	第五單元	長條圖與折線圖
數學	康軒版	六下	第五單元	怎樣解題

貳、 研究設備及器材

一、電腦(Scratch 程式、Excel)

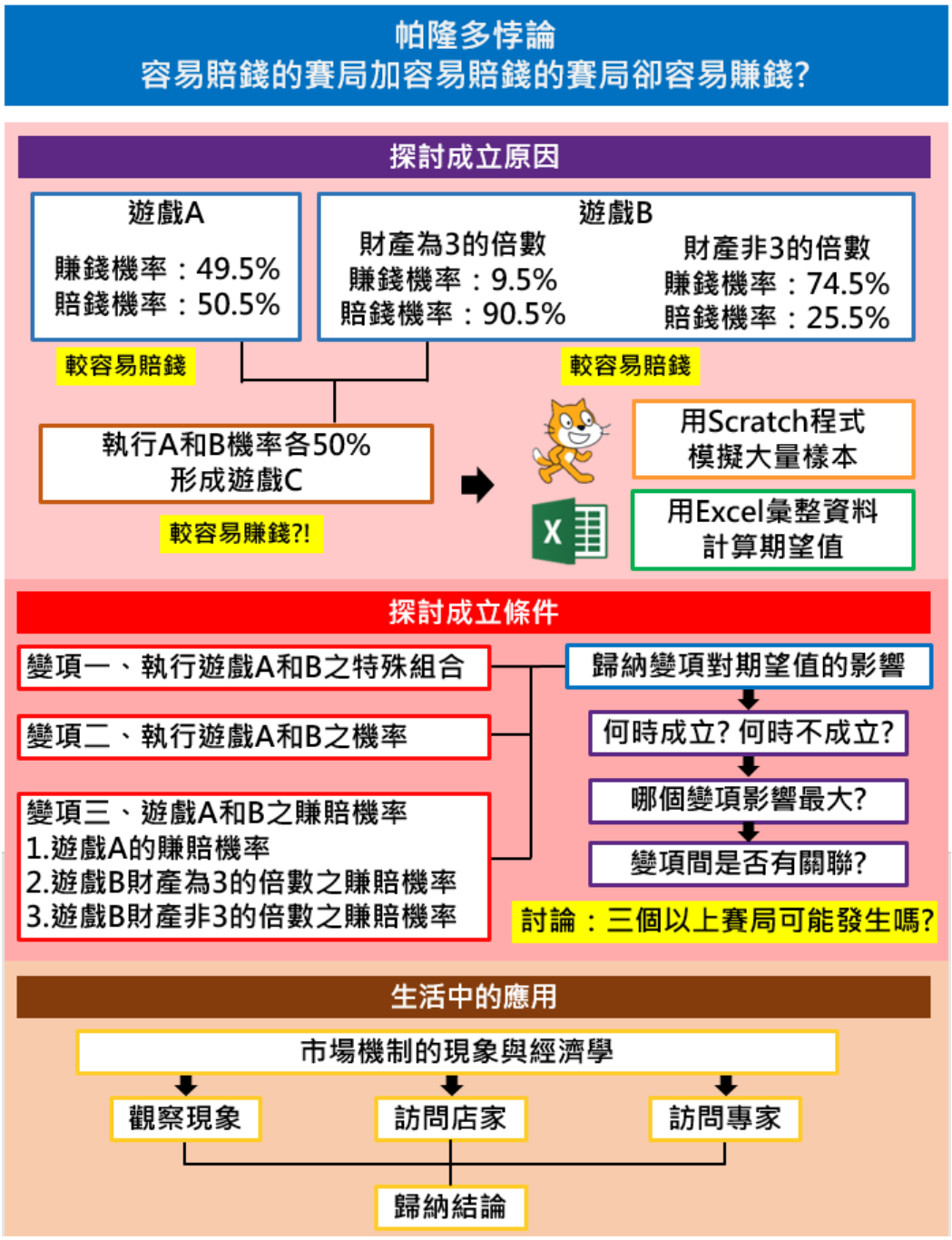
二、白紙

三、紀錄文具

四、計算機

參、 研究方法

一、研究架構圖(作者以 PPT 繪製而成，圖示擷取 Scratch 及 Excel 之應用程式圖案)



二、使用樹狀圖及 Excel 計算期望值

將所有財產變化的過程寫出，標示各事件的發生機率，乘以財產變化加總後即可得到期望值，如圖 3-1 和表 3-1。

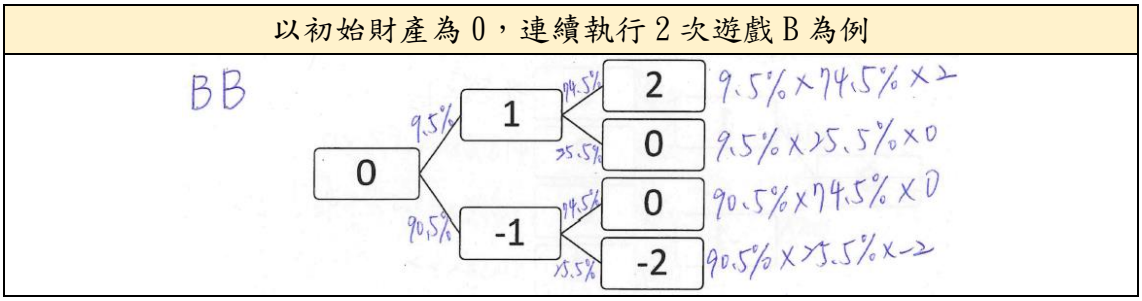


圖 3-1　以樹狀圖計算期望值示意圖(作者手繪自行拍攝)

財產變化過程	發生機率	財產變化	發生機率×財產變化
0→1→2	9.5% × 74.5%	2	0.14155
0→1→0	9.5% × 25.5%	0	0
0→-1→0	90.5% × 74.5%	0	0
0→-1→-2	90.5% × 25.5%	-2	-0.46155
		期望值	**-0.32**

表 3-1　計算各事件機率及期望值紀錄表

將樹狀圖的資料輸入，運用自行設計的函數計算期望值，如表 3-2 和表 3-3，「財產從 0 開始，進行 4 次遊戲 B」的期望值為-0.3930.25，較容易賠錢。

表 3-2　變數及函數對應表

情況	遊戲 A		遊戲 B				財產變化
	賺錢	賠錢	3 的倍數		非 3 的倍數		
			賺錢	賠錢	賺錢	賠錢	
機率	49.5%	50.5%	9.5%	90.5%	74.5%	25.5%	
次數	a	b	c	d	e	f	g
事件機率×財產變化	$(49.5\%)^a \times (50.5\%)^b \times (9.5\%)^c \times (90.5\%)^d \times (74.5\%)^e \times (25.5\%)^f \times g$						

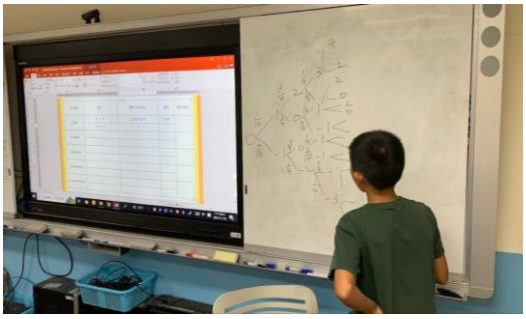


圖 3-2　探討遊戲規則紀錄圖(作者自行拍攝)

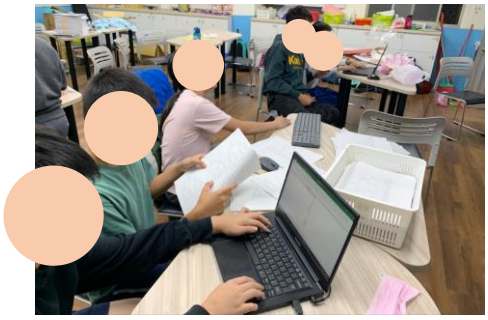
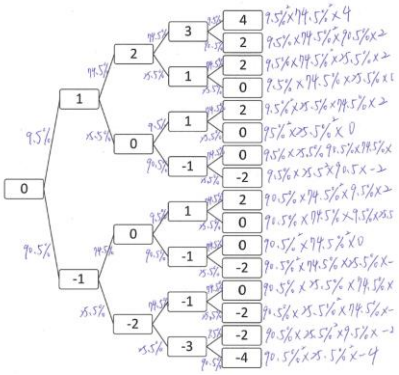


圖 3-3　將實驗結果輸入至電腦(作者自行拍攝)

表 3-3　樹狀圖轉換資料示意表

樹狀圖原稿	記錄至 Excel



情況	遊戲A		遊戲B				財產變化	事件機率x財產變化
			3的倍數		非3的倍數			
	賺錢	賠錢	賺錢	賠錢	賺錢	賠錢		
機率	49.50%	50.50%	9.50%	90.50%	74.50%	25.50%		
			2		2		4	0.020036403
			1	1	2		2	0.095436549
			1		2	1	2	0.026890961
			1		1	2	0	0
			2		1	1	2	0.003429049
			2			2	0	0
			1	1	1	1	0	0
			1	1		2	-2	-0.011181049
			1	1	2		2	0.095436549
			1	1	1	1	0	0
				2	2		0	0
				2	1	1	-2	-0.311188549
				1	2	1	0	0
				1	1	2	-2	-0.087682961
			1	1		2	-2	-0.011181049
				2		2	-4	-0.213028403
								-0.3930325

（作者自行繪製及使用 Excel 紀錄繪製而成）

三、運用程式模擬財產狀況(模擬數據因資料繁多，呈現於附錄)

進行遊戲 n 次，會產生2^n項事件數，用畫樹狀圖及人工計算的方式雖能準確計算期望值，但是太花時間。因此，我們將相同的函數概念應用至 Scratch 中，產生大量數據，再來分析進行多次遊戲期望值的改變與趨勢，變數說明如表 3-4。

表 3-4　變數對應設計原因及概念表

變數名稱	設計原因及概念
玩哪一個	判斷要「執行遊戲 A」或「執行遊戲 B」
抽到的數字	判斷在遊戲 A 及遊戲 B 中是「賺錢」或「賠錢」
財產	(1)從當前財產判斷，若執行遊戲 B 時，要玩「容易賠錢的硬幣」或「容易賺錢的硬幣」 (2)判斷進行完遊戲後(一次樣本)，是「賺錢」或「賠錢」
賺的次數	進行完遊戲後，「有幾次的樣本數是賺錢」
虧的次數	進行完遊戲後，「有幾次的樣本數是賠錢」
不賺不賠的次數	進行完遊戲後，「有幾次的樣本數是不賺不賠」
財產紀錄	累加每個樣本數的財產變化
進行 n 次的期望值	財產紀錄/n

四、使用財產回推期望值

將「財產結果」除以「遊戲進行的次數」得到的數值，代表「每多進行一次遊戲可能的財產變化」，意義與期望值相似。測試後，發現用這樣的算法很接近真實的期望值，而且模擬次數越多，誤差越小。在我們無法使用高階數學運算工具如：矩陣、馬可夫鏈等的情況下，用程式模擬再回推真實的期望值是較有效益的作法。

五、欲探討變項與模擬次數

（一）探討變項（依據原始帕隆多悖論調整）

1. 每次決定要執行遊戲 A 和遊戲 B 之特定順序組合

2. 每次決定要執行遊戲 A 和遊戲 B 之機率

3. 遊戲 A 的賺賠機率

4. 遊戲 B 財產為 3 的倍數時的賺賠機率

5. 遊戲 B 財產非 3 的倍數時的賺賠機率

（二）預計模擬次數及理由

1. 重複執行 100 萬次，用極大的樣本數算出平均值，**讓結果更加接近真實的期望值**。

2. 考量研究中各變項要進行相同的次數才能比較期望值差異，在特殊組合中的變項有特定的執行順序，故挑選所有實驗進行次數之公倍數。另外也考量使用 Scratch 模擬的時間不能過長，模擬進行 300 次遊戲的 100 萬個樣本，一組實驗約要花費 15 至 20 分鐘。綜合考量後，為了**兼顧足夠的樣本數及可信度**，選擇模擬進行 300 次遊戲。

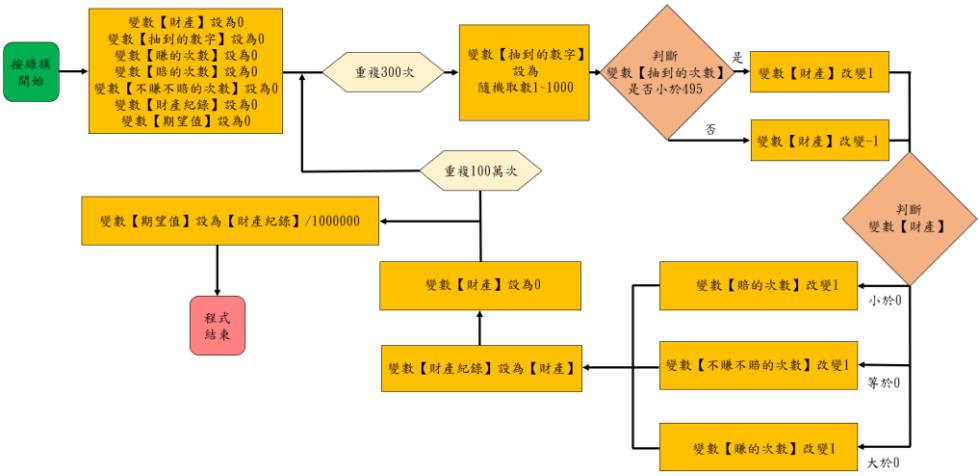
六、訪談專家學者與店家

帕隆多悖論與獲利及期望值相關，我們好奇其在經濟學與市場機制的應用，因此用訪談的方式，訪談相關專業人員，希望能更了解這個現象及原理。

肆、 研究過程與結果

一、探討遊戲 A 容易賠錢的原因

遊戲 A 賠錢的理由很直觀，因為擲到賠錢硬幣的機率高，期望值為：$1 \times 49.5\% + (-1) \times 50.5\% = -0.01$。用程式模擬，**<u>期望值也為負值</u>**，驗證遊戲 A 較容易賠錢。

遊戲 A
模擬進行 300 次遊戲 A 的期望值，總共 100 萬筆樣本平均
規則：49.5%賺 1 元，50.5%賠 1 元。
程式流程圖(作者用 PPT 繪製而成)

程式模擬圖(作者用 Scratch 進行並截圖紀錄)


二、探討遊戲 B 容易賠錢的原因

遊戲 B 在財產為 3 的倍數時，會進行較容易賠錢的規則；在財產為非 3 的倍數時，會進行較容易賺錢的遊戲。

觀察與想法：

（一）財產從 0 開始，必先使用較賠錢的規則，直觀上會容易賠錢很合理。

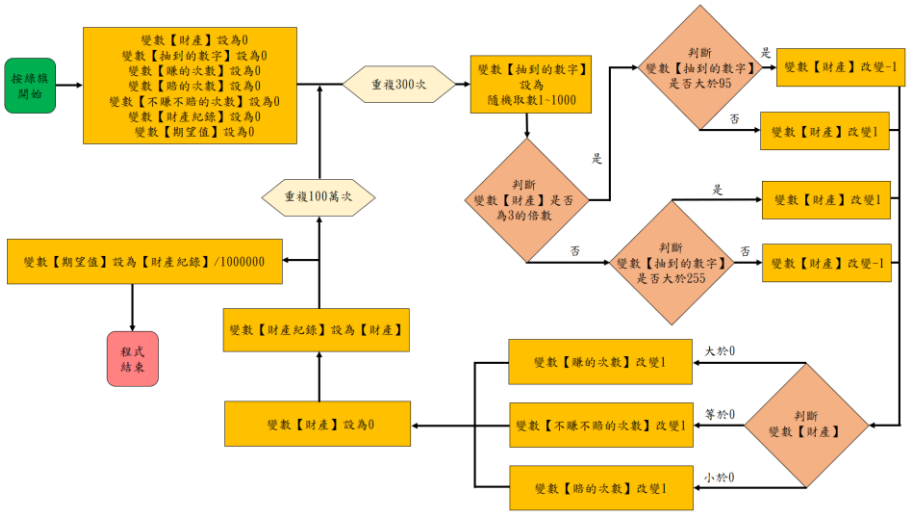
（二）財產即使持續增加一定會遇到 3 的倍數，一定會遇上較賠錢的規則。且 3 的倍數賠錢的機率明顯高於非 3 倍數時賺錢的機率。

步驟：計算從「不同財產」開始財產的變化過程及各事件機率，並用程式模擬。

表 4-1 遊戲 B 從初始財產 0 開始進行計算表

起始財產	財產變化過程	機率計算過程	機率
0	0→1	9.5%	9.5%
	0→1→2	9.5% × 74.5%	7.0775%
	0→1→2→3	9.5% × 74.5% × 74.5%	5.2727375%
	0→1→2→3→4	9.5% × 74.5% × 74.5% × 9.5%	0.50091006%
1	1→2	74.5%	74.5%
	1→2→3	74.5% × 74.5%	55.5025%
	1→2→3→4	74.5% × 74.5% × 9.5%	5.2727375%
2	2→3	74.5%	74.5%
	2→3→4	74.5% × 9.5%	7.0775%

遊戲 B
模擬進行 300 次遊戲 B 的期望值，總共 100 萬筆樣本平均
規則：當財產是 3 的倍數，9.5%賺 1 元，90.5%賠 1 元；當財產非 3 的倍數，74.5%賺 1 元，25.5%賠 1 元。
程式流程圖(作者用 PPT 繪製而成)



程式模擬圖(作者用 Scratch 進行並截圖紀錄)





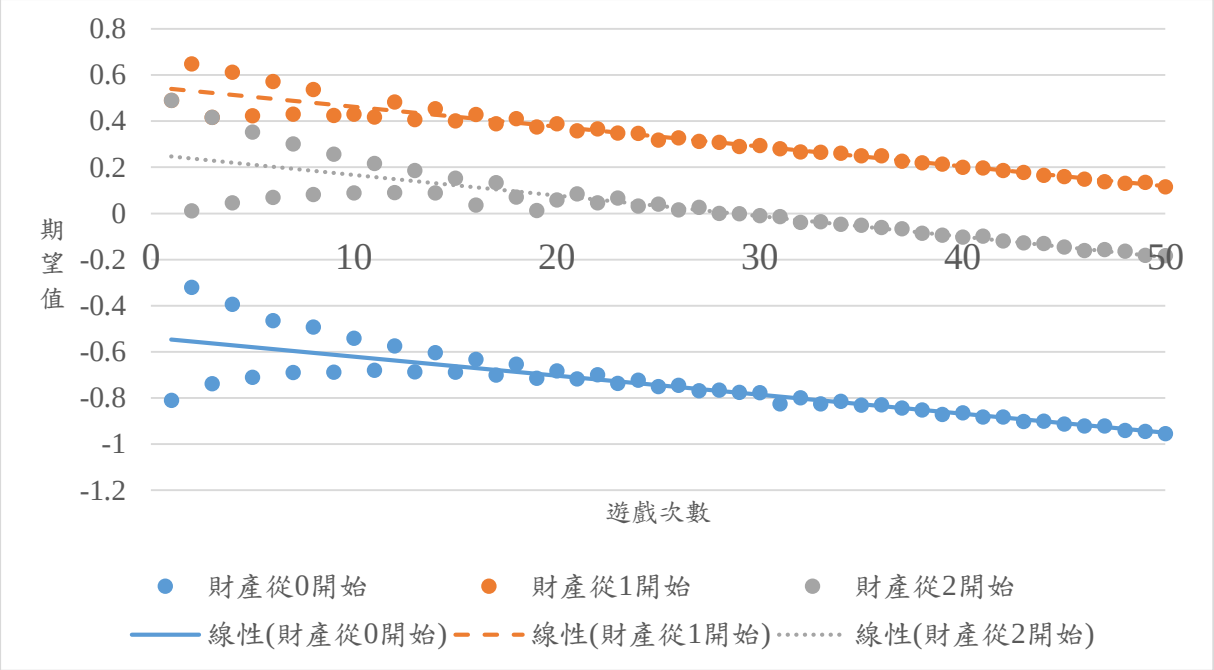


圖 4-1　在不同起始財產連續執行遊戲 B 之期望值趨勢圖(作者以 Excel 繪製而成)

發現：要跨過財產為 3 的倍數時，機率皆大幅降低。

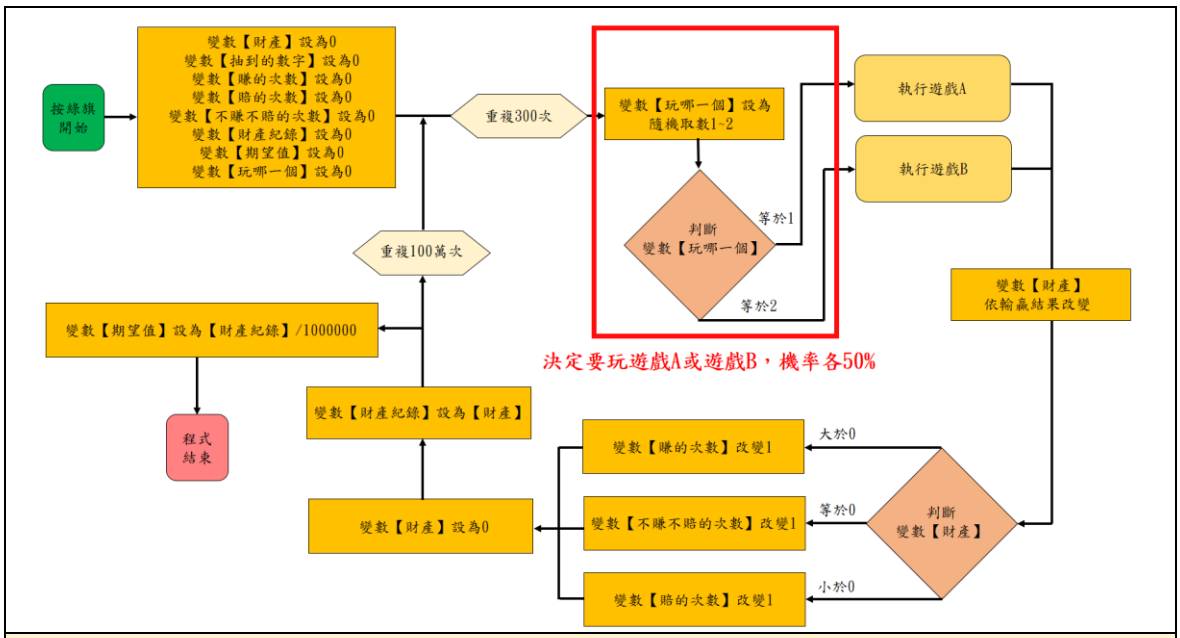
小結：不論財產從多少開始，趨勢線顯示若進行越多次遊戲 B，都會使期**望值越來越低**，驗證遊戲 B 是較容易賠錢的遊戲。

三、探討遊戲 C 容易賺錢的原因

觀察與想法：因為確定遊戲 B 會賠錢的主要原因，是當財產為 3 的倍數時進行的遊戲規則較容易賠錢，**如果能在遇到 3 的倍數時，改為進行遊戲 A 的規則**，有機會不要賠這麼多錢，相對就有機會賺錢。

步驟：使用程式模擬遊戲 C 的期望值，並以 60 次為間隔，比較遊戲 A、遊戲 B 和遊戲 C 的期望值。

遊戲 C
模擬進行 300 次遊戲 C 的期望值，總共 100 萬筆樣本平均
規則：執行遊戲 A 的機率 50%，執行遊戲 B 的機率 50%，每次選擇皆為獨立事件 當執行遊戲 A：49.5%賺 1 元，50.5%賠 1 元 當執行遊戲 B： 當財產是 3 的倍數，9.5%賺 1 元，90.5%賠 1 元 當財產非 3 的倍數，74.5%賺 1 元，25.5%賠 1 元
程式流程圖(作者用 PPT 繪製而成)



程式模擬圖(作者用 Scratch 進行並截圖紀錄)

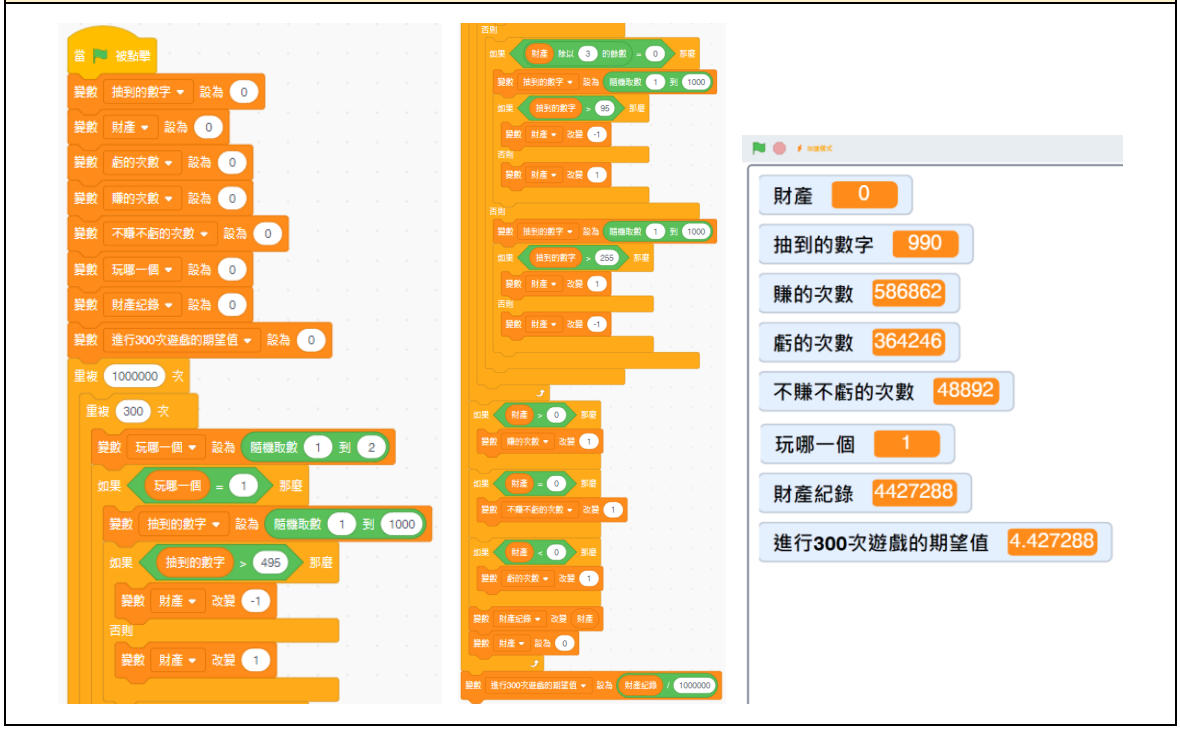


表 4-2　各遊戲進行 60 次至 300 次之期望值彙整表

進行次數	60	120	180	240	300
遊戲 A	-0.6	-1.2	-1.8	-2.4	-3
遊戲 B	-1.045632	-1.564384	-2.087872	-2.60125	-3.14482
遊戲 C	0.654192	1.604506	2.51411	3.482208	4.429782

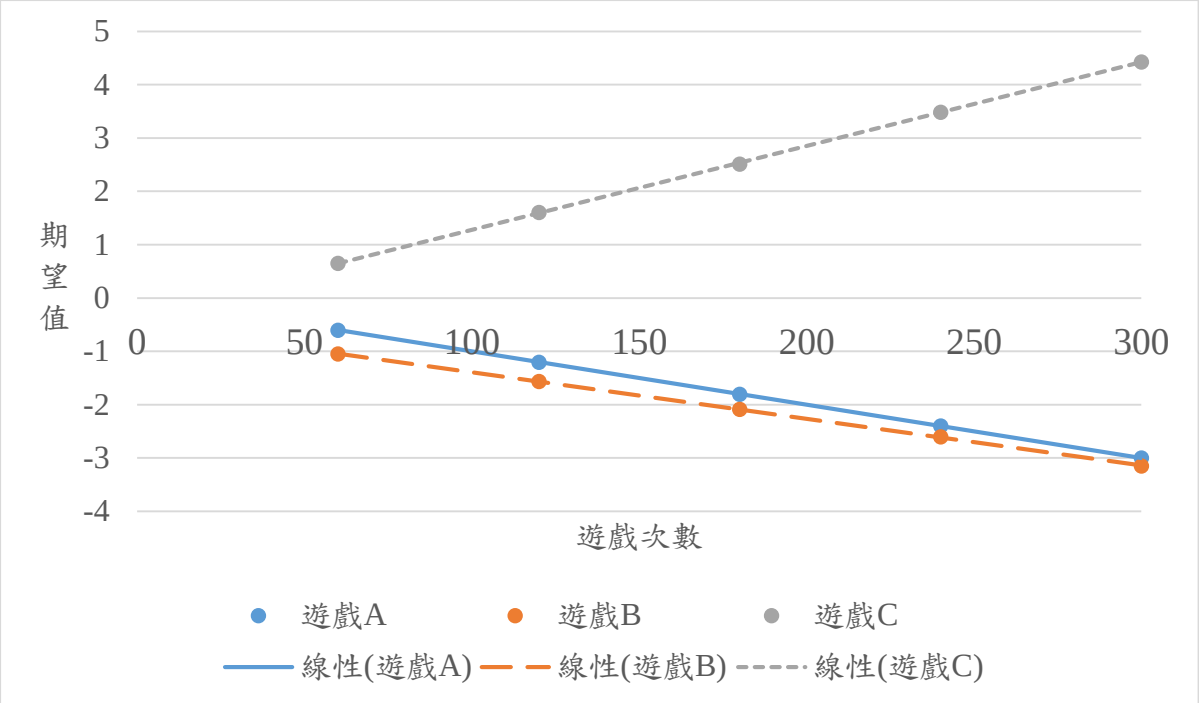


圖 4-2　各遊戲進行 60 次至 300 次之期望值趨勢圖(作者以 Excel 繪製而成)

發現：觀察期望值趨勢線，遊戲 C 進行越多次，期望值越高，是較容易賺錢的遊戲；遊戲 A 和遊戲 B 進行越多次，期望值越低，是較容易賠錢的遊戲，且**遊戲 B 比遊戲 A 更容易賠錢**。

四、探討「執行遊戲 A 和 B 之機率」對期望值的影響

觀察與想法：原先是以各 50%的機率決定每一次要玩遊戲 A 或遊戲 B，如果改變這個執行機率，是否能找到符合帕隆多悖論成立的機率範圍？

步驟：以 5%為間距，用程式模擬不同的執行機率。

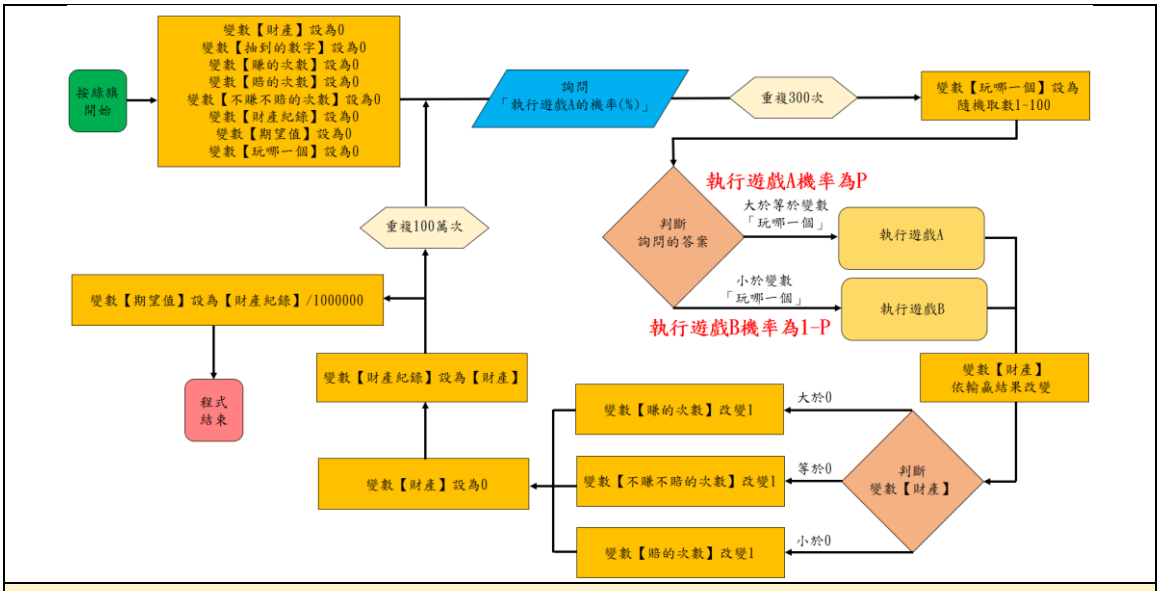
遊戲 A 和 B 的執行機率變動

執行遊戲 A 的機率為 p，執行遊戲 B 的機率為(1-p)

規則：當執行遊戲 A 時，49.5%賺 1 元，50.5%賠 1 元；當執行遊戲 B 時，當財產是 3 的倍數，9.5%賺 1 元，90.5%賠 1 元，當財產非 3 的倍數，74.5%賺 1 元，25.5%賠 1 元。

A	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
B	100%	95%	90%	85%	80%	75%	70%	65%	60%	55%	50%
A	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%	
B	45%	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%	

程式流程圖(作者用 PPT 繪製而成)



程式模擬圖(作者用 Scratch 進行並截圖紀錄)



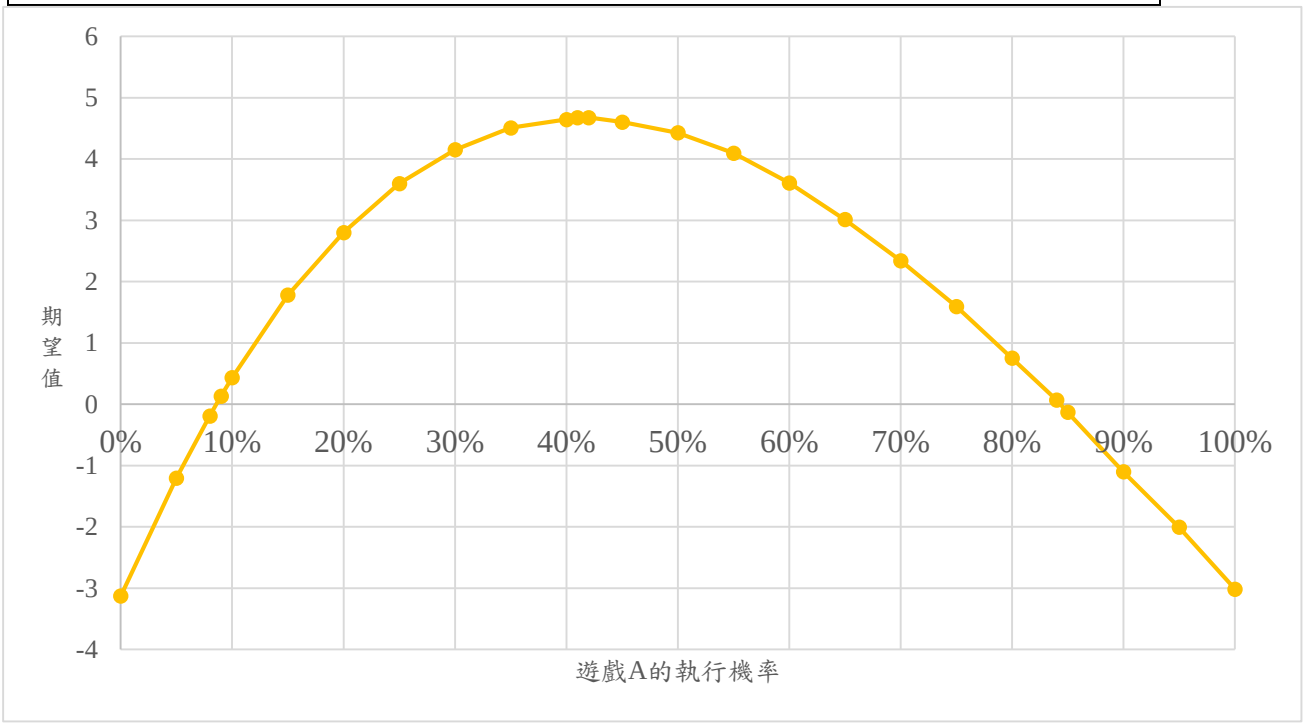


圖 4-3　執行遊戲 A 的機率對期望值之影響(作者以 Excel 繪製而成)

發現：當執行遊戲 A 的機率為 9%至 84%時，期望值皆是正數，符合帕隆多悖論，是較容易賺錢的遊戲。且當執行遊戲 A 的機率為 41%時，期望值最高。

小結：我們找出比參考資料**更精準的機率範圍與獲利最高時的執行機率**，另外，能從 41%這個數字推論出，主要是依靠遊戲 B 提升財產，在特定時候換成遊戲 A，產生最高的期望值。

五、探討每次「執行遊戲 A 和 B 之特殊組合」對期望值的影響

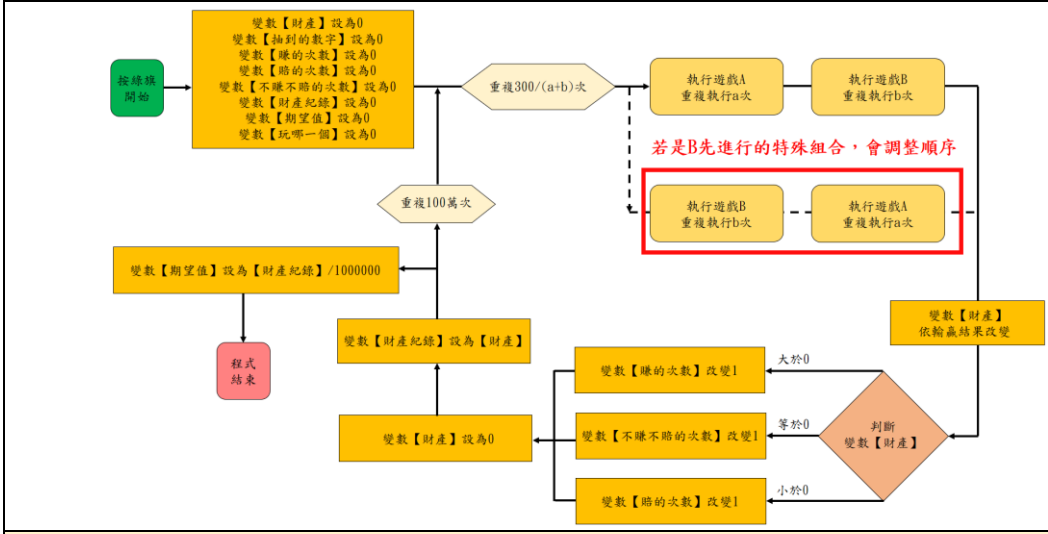
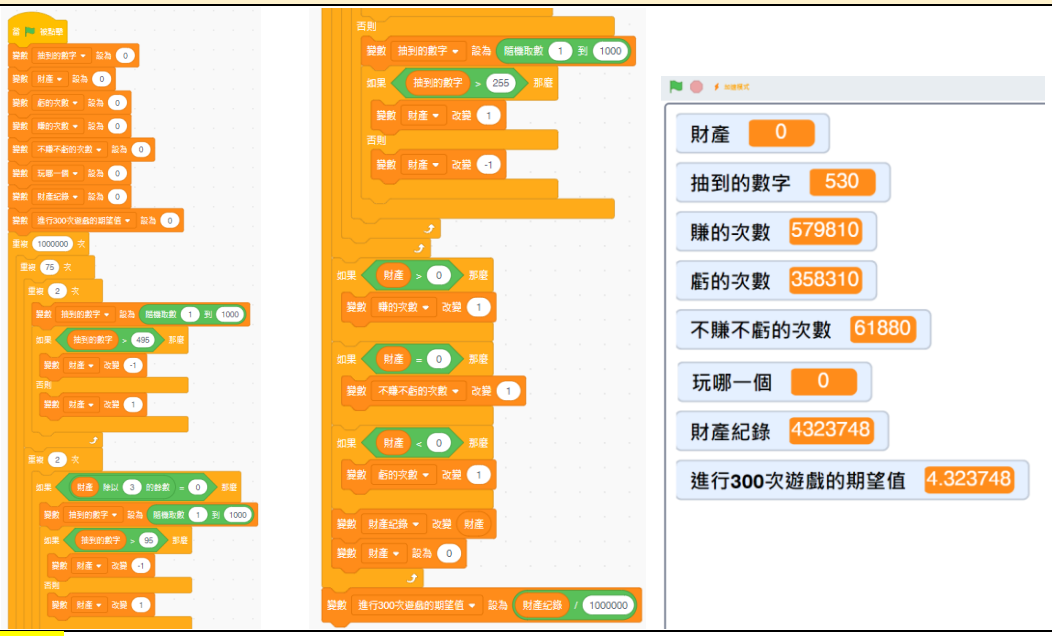
觀察與想法：先前的研究結果發現帕隆多悖論的關鍵是「在財產為 3 的倍數時之賺賠機率」，若能在適當時機換成轉進行相對「賠比較少」的遊戲 A 規則，是否能讓期望值變高？

步驟：依據我們的猜想，將遊戲 A 與遊戲 B 以特定順序編排成特定組合，以 60 次為間距，模擬進行遊戲總次數 60 次至 300 次的期望值，特殊組合如表 4-3。

表 4-3　遊戲 A 與遊 B 特殊組合及驗證項目彙整表

<table>
<tr><th>每組數量</th><th>模擬順序及組合</th><th>欲驗證的項目</th></tr>
<tr><td>2 個一組</td><td>AB、BA</td><td>● 哪個遊戲先開始是否會造成差異？</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 個一組</td><td>AAB、BAA、ABA</td><td rowspan="2">● 用特殊組合的方式是否能降低「較賠錢」規則(3 的倍數)造成的影響？</td></tr>
<tr><td>ABB、BAB、BBA</td></tr>
<tr><td>4 個一組</td><td rowspan="3">所有組合，數量過多省略</td><td rowspan="2">● 每組數量不同，是否會影響獲利？</td></tr>
<tr><td>5 個一組</td></tr>
<tr><td>6 個一組</td><td>● 結果是否跟 3 個一組相同？</td></tr>
</table>

程式模擬注意事項：每個組合組成遊戲數不同，若遊戲 A 進行 a 次，遊戲 B 進行 b 次，總共要進行 300 次，因此每次樣本的重複執行設定為 300/(a+b)次，才能以相同基準進行比較。

交替進行遊戲 A 與遊戲 B 的特殊組合
模擬「用特殊組合」進行遊戲共 300 次的期望值，總共 100 萬筆樣本平均
當執行遊戲 A：49.5%賺 1 元，50.5%賠 1 元 當執行遊戲 B： 當財產是 3 的倍數，9.5%賺 1 元，90.5%賠 1 元 當財產非 3 的倍數，74.5%賺 1 元，25.5%賠 1 元
程式流程圖(作者用 PPT 繪製而成)

程式模擬圖(作者用 Scratch 進行並截圖紀錄)


發現 1：兩個一組的特殊組合皆容易賠錢，三個一組的特殊組合皆較容易賺錢，在**特定時機避開玩遊戲 B 確實能增加獲利**。

發現 2：觀察趨勢線之傾斜程度，能發現相同進行順序(AAB-ABA-BAA 及 ABB-BAB-BBA)的組合增長趨勢相同，因此起始遊戲雖會影響一開始的獲利，但進行多次遊戲後，並**不影響賺錢或賠錢的趨勢**。

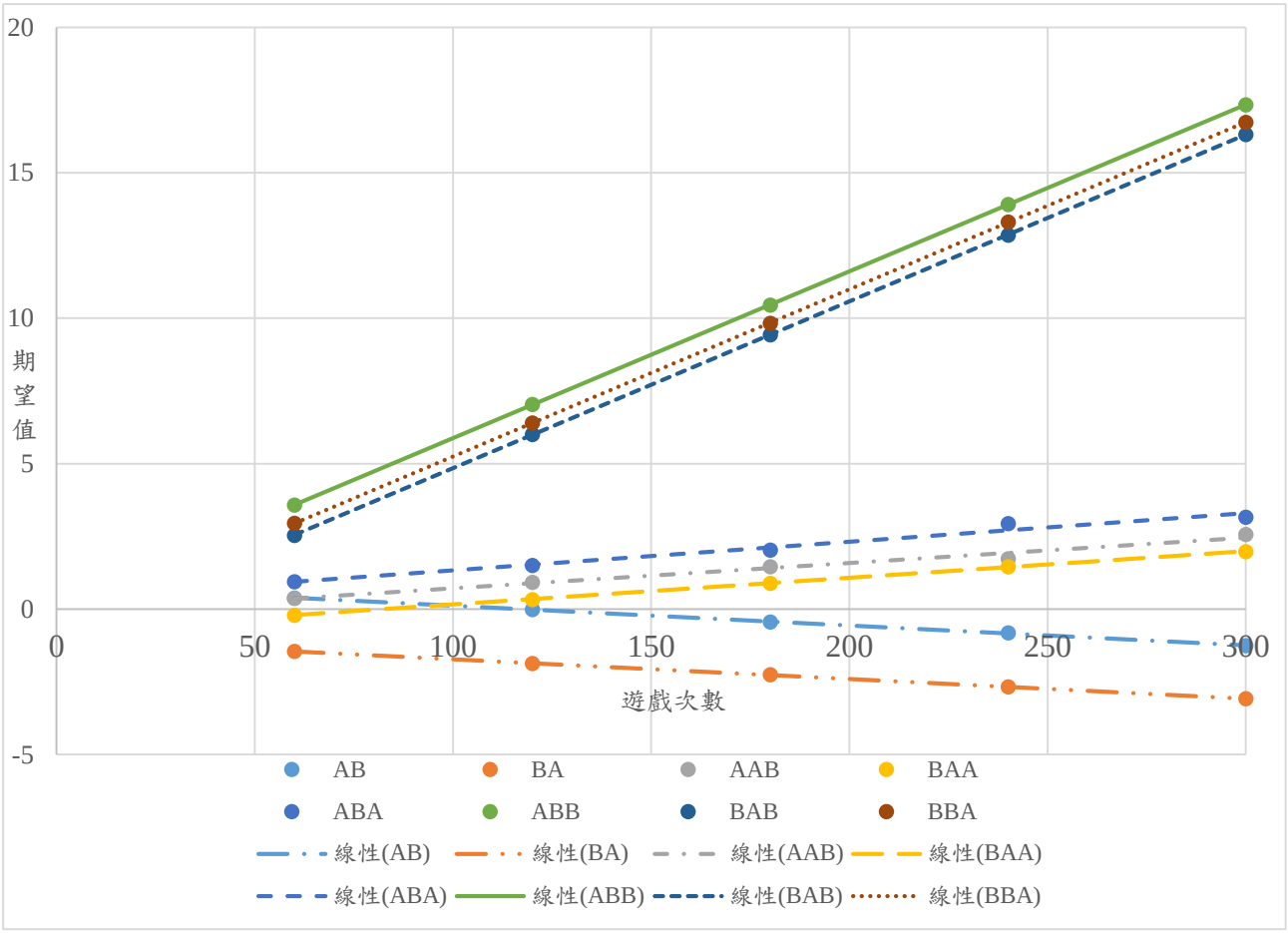


圖 4-4　特殊組合執行 60 次至 300 次之期望值趨勢圖(作者以 Excel 繪製而成)

發現 3：4 至 6 個一組的特殊組合數量過多，在第伍章討論。目前發現在這些組合中僅出現少數賠錢情況，平均多進行一次遊戲都能提升獲利，**奇數個一組增加之期望值高於偶數個一組之期望值**。

表 4-4　各特殊組合中賺賠次數統計及平均期望值改變彙整表

	賺的組合(種)	賠的組合(種)	平均多進行一次遊戲可增加之期望值
2 個一組	0	4	-0.034921793
3 個一組	6	2	0.173165527
4 個一組	8	8	0.29654293
5 個一組	30	2	0.655699
6 個一組	50	14	0.576633333
7 個一組	106	22	2.290746667

小結：用特定組合之方式確實能降低「較賠錢」規則(3 的倍數)造成的影響，讓遊戲越玩越賺錢，ABB 組合進行 300 次遊戲後，有最高的期望值 17.3359。在持續穩定狀態後，每組數量越多，平均多進行一次遊戲可增加之期望值也越多。

六、探討「遊戲 A 和 B 之賺賠機率」對期望值的影響

觀察想法：我們對於「原始帕隆多悖論設定之賺賠機率」感到好奇，為什麼這樣設定就能讓兩個較賠錢的遊戲，形成較容易賺錢的遊戲？

步驟 1：規則中的賺賠機率總共有三個變項，探討時，一次調整一個變項，調整之機率間距為 0.1%，找出符合帕隆多悖論的「賺賠機率範圍」。

***模擬時要先確認遊戲 B 的規則較容易賠錢，否則不符合帕隆多悖論。**

步驟 2：確認「賺賠機率範圍」後，用程式模擬找出在哪一種賺賠機率時，獲利會最高，並且比較三種賺賠機率對獲利的影響最大。

發現 1：在每次遊戲 A 與遊戲 B 執行機率各 50%的情況下，符合帕隆多悖論的賺賠機率範圍如表 4-5。

表 4-5　各規則賺賠機率範圍彙整表

規則	遊戲 A	遊戲 B	
		財產為 3 的倍數	財產為非 3 的倍數
	賺錢機率範圍： 47.9%至 49.9%	賺錢機率：9.5% 賠錢機率：90.5%	賺錢機率：74.5% 賠錢機率：25.5%
	賺錢機率：49.5% 賠錢機率：50.5%	賺錢機率範圍： 5.2%至 10.6%	賺錢機率：74.5% 賠錢機率：25.5%
	賺錢機率：49.5% 賠錢機率：50.5%	賺錢機率：9.5% 賠錢機率：90.5%	賺錢機率範圍： 72%至 75.7%

發現 2：變項中，「遊戲 B 財產非 3 的倍數之賺賠機率」影響期望值的程度最大。

表 4-6 調整各遊戲賺賠機率對期望值影響之彙整表

	遊戲 A 賺錢之機率	遊戲 B 財產為 3 的倍數之賺錢機率	遊戲 B 財產非 3 的倍數之賺錢機率
起始機率	49.5%	9.5%	74.5%
調整方式	向下調整 0.1%	向上調整 0.1%	向上調整 0.1%
調整範圍	49.4%至 47.9%	9.6%至 10.6%	74.6%至 75.7%
臨界機率	47.9%	10.6%	75.7%
臨界機率 之期望值	0.042762	5.618934	6.596032
每次調整 期望值變化	-0.29	0.108331455	0.180728667

小結：只要在我們研究出的「各遊戲之賺賠機率」範圍內，帕隆多悖論皆能成立。推測原始規則設計的機率，是為了讓賺錢和賠錢的效果最明顯，不然其實在其他機率範圍內，也會發生相同「賠錢+賠錢=賺錢」的現象。

七、比較各變項對帕隆多悖論財產變化的影響

發現：遊戲 A 與遊戲 B 的特殊組合，對於獲利的影響程度最大，如表 4-7。

表 4-7 各變項對帕隆多悖論之期望值影響程度比較表

變項	執行 300 次遊戲之最高期望值及條件	影響程度
遊戲 A 與遊戲 B 的特殊組合	當執行遊戲組合為 ABB 時，期望值為 17.3359 。	最大
遊戲 A 與遊戲 B 的賺賠機率	遊戲 B 財產非 3 的倍數時，賺錢機率調整至 75.7%，期望值為 6.596032。	其次
遊戲 A 與遊戲 B 的執行機率	當遊戲 A 的執行機率為 41%時，期望值為 4.676076。	最小

歸納與小結：若可以在要遇到「較容易賠錢的規則」(財產為 3 的倍數)時，能選擇玩「相對賠比較少的規則」(遊戲 A)，能有最高的期望值。**特殊組合的 ABB**，就是利用這個原理和方式，得到最大的獲利。

八、帕隆多悖論在「三種以上賽局」一起發生的可能性

想法：既然兩個賽局在一定的條件下能產生帕隆多悖論，若再加入一個賽局到原始的規則中，是否也能讓帕隆多悖論成立？ 成立時的條件是什麼？

步驟：

（一）加入一個跟原始賽局相同的遊戲 A 或遊戲 B。

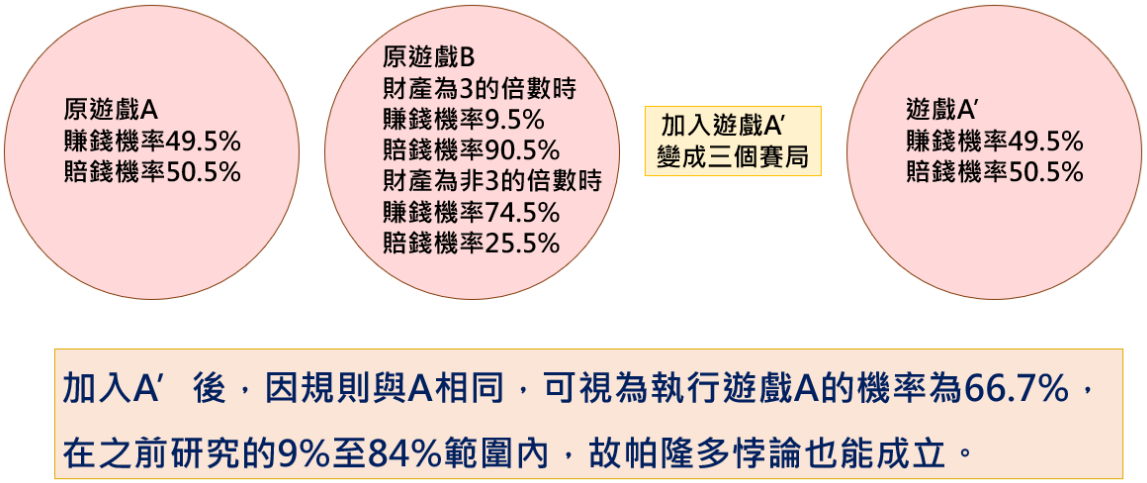


圖 4-5　帕隆多悖論在三種以上賽局程立之設計方式示意圖(作者以 PPT 繪製而成)

（二）參考原始帕隆多悖論，調整賺賠機率並用程式模擬尋找臨界值，設計會因為其他財產倍數(4、5、6、7 倍)改變賺賠機率之規則。

表 4-8　判斷規則改為其他倍數之期望值彙整表

財產倍數	財產是 n 的倍數		財產非 n 的倍數		進行 300 次遊戲之期望值
	賺錢機率	賠錢機率	賺錢機率	賠錢機率	
n=4	9.5%(原)	90.5%(原)	68%(臨)	32%(臨)	10.913882
	3.9%(臨)	96.1%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=5	9.5%(原)	90.5%(原)	64%(臨)	36%(臨)	15.084502
	1.6%(臨)	98.4%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=6	9.5%(原)	90.5%(原)	61.3%(臨)	38.7%(臨)	18.14499
	0.6%(臨)	99.4%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=7	9.5%(原)	90.5%(原)	59.5%(臨)	40.5%(臨)	20.473002
	0.3%(臨)	99.7%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	

發現與小結：

只要符合執行機率及賺賠機率的範圍，要在三種以上的賽局中發生帕隆多悖論算是**非常容易**。除此之外，依照「現有財產的倍數」決定賺賠機率之賽局也有很多種變化，皆能讓帕隆多悖論成立。

九、帕隆多悖論在生活中的應用

觀察與想法：研究者所在地是個觀光業發展蓬勃的縣市，有許多特色名產，販售相同產品的店家在制定價格很關鍵，這些經濟相關活動會不會與帕隆多悖論有關？

訪談店家：

我們訪談販售特色名產的店家，店家對於有「公定價」的原因說明：

（一）避免同行業削價競爭，導致惡性競爭，影響產業生存。

（二）維持每項商品該具有的價值及販售後的基本利潤。

（三）會強調自家產品特色，並以購買指定數量即贈送商品的方式取代削價。

訪談專家學者：

我們將此研究結果發現與訪談店家的結果彙整，諮詢具有經濟專業與觀光產業實務經驗的教授後，了解許多市場機制中有類似帕隆多悖論概念的經濟學思維，商家可能不全然了解相關理論，卻可以透過尋找週期性的規律及經驗擬定策略，追求更高的獲利。

發現：訪談中，教授特別強調實務上時機(timing)的重要，商家在發現一些模式或規律，就會調整策略，選擇停止或繼續玩不同的遊戲。**這與我們研究結果中「遊戲 A 與遊戲 B 的特殊組合對期望值影響最大」完全相同**，也就是在發現遊戲 B 在財產為 3 的倍數時賠錢機率很高，換成玩遊戲 A 即能降低賠率，形成了 **ABB 或 BBA 的執行組合，產生最高的獲利情形。**

訪談題綱與訪談紀錄：

（一）問題一：請問您對於帕隆多悖論及我們的研究結果，有什麼看法？

確實是較新的理論，而且會讓人感到驚訝，網路上也幾乎沒有人去研究，能從這個現象去找出不同變項的實驗精神值得鼓勵。

（二）問題二：以經濟學及市場機制來看，廠商在商場上是否可能利用帕隆多悖論

的思維進行相關策略？

教授介紹五種類型的案例(受限於篇幅，僅列出項目及例子)：

1. 財務管理上，有「一籃子股票的概念」，如：ETF。

2. 行銷管理上，有「促銷」的策略，如：打折、買一送一。

3. 策略管理上，廠商會進入看似穩賠的事業別，建立先佔優勢(pioneering)。

4. 外匯管理上，國家或廠商會操作外匯期貨，賺取價差並同時避險。

5. 政治經濟學上，廠商會裡用投資遊說組織，影響國會的立法方向。

(三) 問題三：請問您會建議如何應用帕隆多悖論，來增加獲利？

雖然以上的例子和帕隆多悖論相似，但實務上的經營管理和時機(timing)息息相關，故和帕隆多悖論可以自由決定如何交替玩兩個遊戲，或是隨機決定如何交替玩兩個遊戲，還是有所不同。通常實務上廠商傾向可以自由決定(或至少可以預測週期)如何交替的時機的機率高時，廠商才可能同時投入兩個看似都負報酬的策略(遊戲)。但帕隆多悖論強調即使隨機長期報酬仍為正。廠商實務上也會設定某些評估參數：例如當 GA 損失到何程度，再也不玩 GB，它就退出 GA 了，且也會估計 GB 獲利到什麼程度，才要下一次操作(玩) GA。所以實務上較不會放任長時間隨機讓此遊戲組合自由或沒有時間限制的玩下去。



圖 4-6　訪談教授此研究之應用方式



圖 4-7　教授講解市場機制中的類似案例

(作者自行拍攝紀錄訪談情況)

伍、 討論

一、帕隆多悖論成立的原因與條件

觀察原始的帕隆多悖論以及進行各變項的模擬與探討，我們推論它的機制與現象符合以下要素：

表 5-1　帕隆多悖論要素與本研究項目之對應表

要素	對應本研究之項目
存在隨機分布的機會與因素	執行與賺賠機率皆是獨立事件
存在一個非對稱性的「開關/控制條件」	財產特定倍數時改變規則，且變得極端容易賠錢
隨機或週期切換的兩個基本動態	每次的執行機率與特殊順序組合

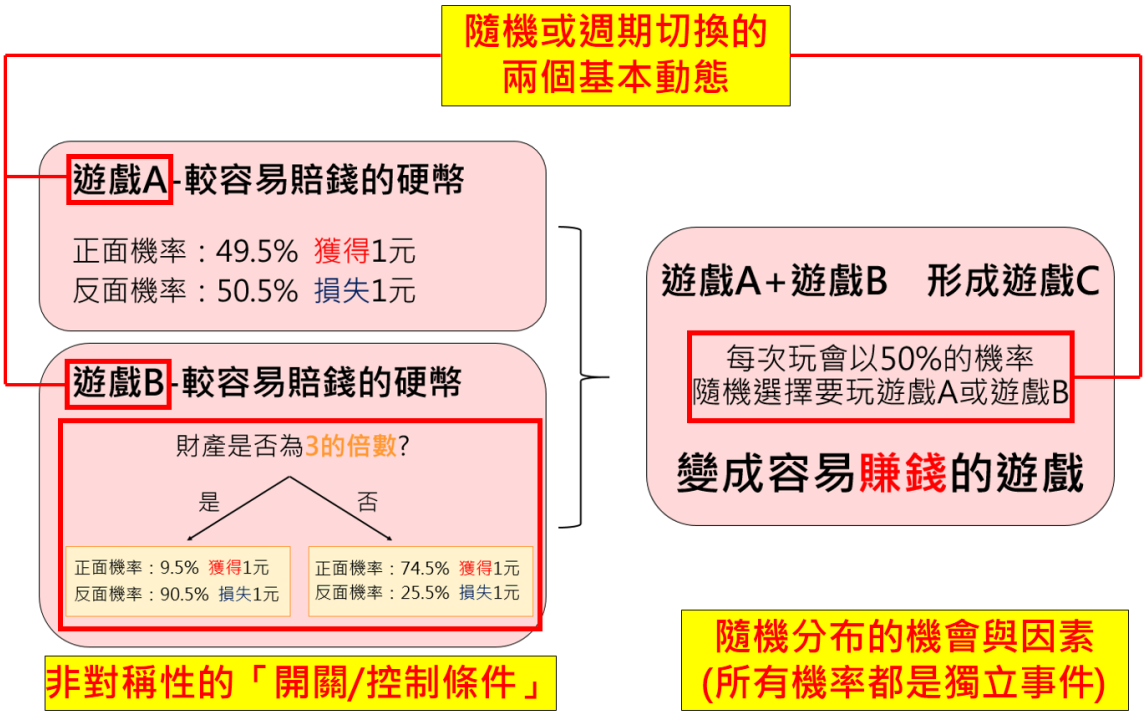


圖 5-1　帕隆多悖論要素與研究變項對照圖(作者以 PPT 繪製而成)

小結：依據在「帕隆多悖論在三種以上賽局的可能性」之研究結果，**「基本動態」可以超過兩個；「非對稱性的控制條件」也不僅限於財產倍數**。掌握以上原則，就能夠創造出更多符合帕隆多悖論的遊戲規則。

二、用程式模擬出之財產結果與期望值驗證遊戲較容易賺錢或賠錢

困境：在無法使用更高階的數學工具的情況下，我們只能利用期望值與程式模擬的方式判斷遊戲容易賺錢或賠錢，雖然能從圖表看出現象及趨勢，但是在數學研究中，還是較缺少客觀的理論值等數據來驗證。

突破：將 2、3、4、5、6、7 個一組的遊戲 A 和遊戲 B 所有交替組合(AB、AAB、ABAB、AAABB、AABBAB、ABABABA……)模擬後，能統計所有組合內賺錢和賠錢的次數。另外，將所有組合的期望值加總再除以遊戲進行次數，即可得出接近理論值之數據(類似於用樹狀圖計算期望值)。

表 5-2　各特殊組合中賺賠次數統計及平均期望值改變彙整表

	賺的組合(種)	賠的組合(種)	平均多進行一次遊戲可增加之期望值
2 個一組	0	4	-0.034921793
3 個一組	6	2	0.173165527
4 個一組	8	8	0.29654293
5 個一組	30	2	0.655699
6 個一組	50	14	0.576633333
7 個一組	106	22	2.290746667

奇數個遊戲一組與偶數個遊戲一組之影響

在探討遊戲 B 賠錢的原因時，已發現進行奇數次及偶數次遊戲會讓期望值大幅跳動，此現象在進行特殊組合的研究時也有相同現象，奇數個遊戲一組的總期望值明顯大於偶數個遊戲一組的期望值，**推測是「切換基礎動態」產生的現象**。

容易賠錢組合之共同特性

將模擬不同組合之賠錢狀況挑出，觀察後發現這些組合都有共同之特性：

（一）遊戲 A 與遊戲 B 交替次數過少，如：全 A、全 B、AAAAAAB、AAAAABB……等。

（二）遊戲中只有 AB 交替的組合，如：AB、ABAB、BABA、ABABAB……等。

我們推測造成這些組合不符合帕隆多悖論的原因，是因為交替過少，**無法有效「切換基礎動態」**。而只有 AB 的交替組合會賠錢，讓我們推論出**單純只進行 AB 的週期**，在帕隆多悖論中會賠錢或是無法大賺。

提高獲利的與最賺錢的關鍵

相較於賠錢的特性，我們更在乎如何能讓獲利最高。奇數個遊戲一組賺錢之狀況，期望值明顯較高的組合有以下共同之特性：

（一）以 3 個一組為循環進行 ABB，如：ABB、BAB、BBA……等。

（二）組合中有 ABB 成分再接續進行 AB，如：ABBAB、BABBA、BABABAB……等。

（三）**避免**連續執行 3 次遊戲 B，如：在 ABABBB 的情況換成 ABABBA。

（四）ABB 是**賺錢的關鍵週期**，搭配 AB 週期交替執行，如：ABABB、ABABBABB、ABABBABBAB……等。

歸納：帕隆多悖論中能賺錢的**關鍵週期是 ABB 與 AB**，這兩個週期交替進行所形成的週期，都是各組合中期望值最高的情況。依照此方式，設計 n 個一組的遊戲週期組合，期望值較高之週期組合如圖 5-2。

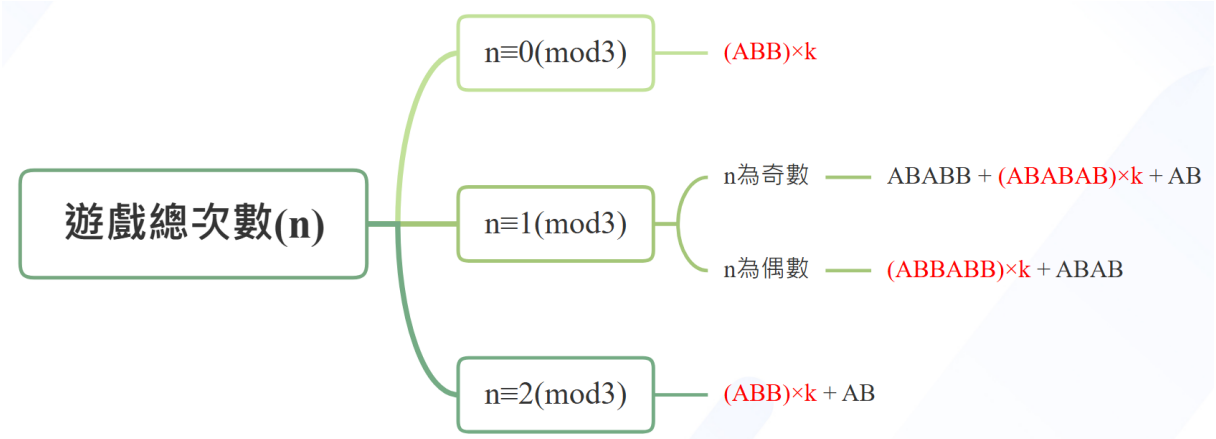


圖 5-2　高期望值組合之關鍵週期彙整圖(作者以 gitmind 繪製而成)

研究亮點與價值：在有限的數學工具及數學知識下，我們運用程式模擬與基本的期望值觀念，觀察帕隆多悖論中不同變項對獲利造成的影響，並用大量樣本數減少誤差，**算出極接近理論值的期望值**。除此之外，發現「特殊組合」對期望值有最大的影響，歸納**容易賺錢及容易賠錢的關鍵及賺錢的週期，找出高報酬率的多樣化投資組合**。

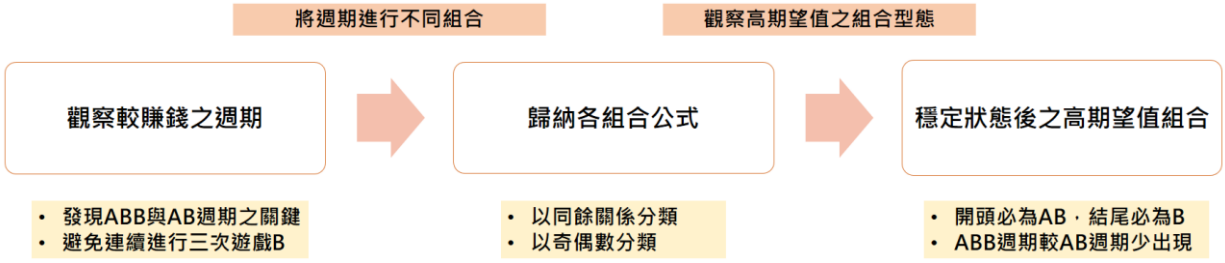


圖 5-3　探究較賺錢週期之歷程圖(作者以 PPT 繪製而成)

三、研究限制與未來展望

目前只能用程式模擬來逆推大概的期望值，探討帕隆多悖論中的機制與各變項對獲利的影響。老師和教授都有提到，未來若學會更高階的數學如：轉移矩陣、馬可夫鏈，是有機會算出穩定狀態的準確數值，這讓我們對未來充滿期待，也期許自己能探究更多有趣的數學問題，並將研究結果應用至其他的領域。

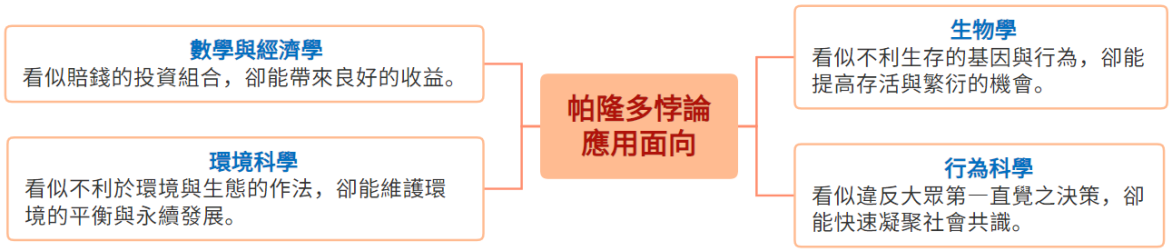


圖 5-4　帕隆多悖論在各領域之應用(作者以 gitmind 繪製而成)

可繼續探討：與「賺錢+賺錢=賠錢」的情況(若依原始帕隆多悖論的規則，將財產變化的結果顛倒，即可發生)中，各變項的影響是否相同?

優勢：解決違反直覺的現象、找出賺錢的關鍵週期。

應用：將看似劣勢的策略重新組合或調整，創造出致勝策略。

陸、 結論

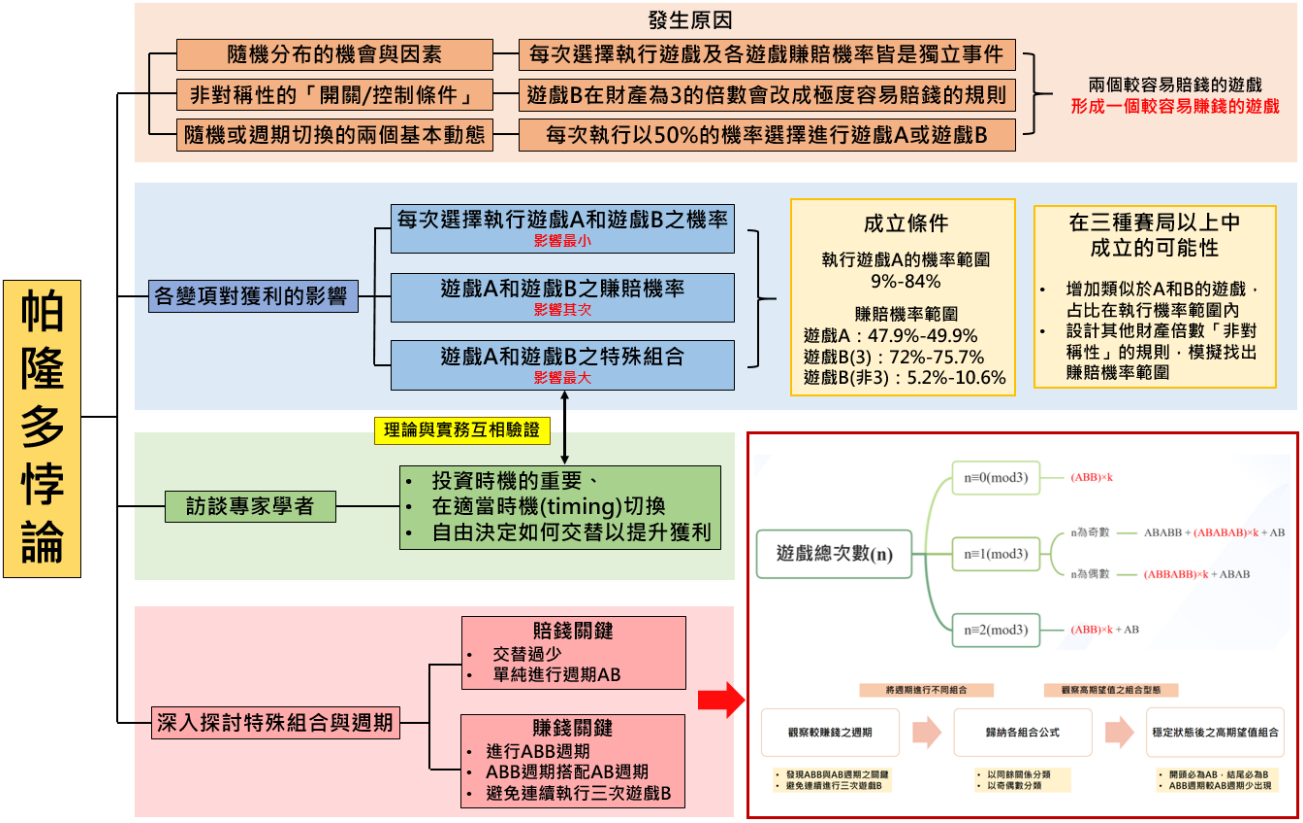


圖 6-1 結論彙整圖(作者以 PPT 繪製而成)

柒、 參考資料及其他

[1] Parrondo’s Paradox: new results and new ideas

[2]康軒版 五下、六下數學課本。

[3]賠錢+賠錢=賺錢？——帕隆多悖論 【譯人說書】#13 數學謎題大圖鑑-2 取自 https://www.youtube.com/watch?v=Pmia8XFvIC8&t=182s

[4]中華民國第 63 屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《你比多少人幸運？以機率累積函數破解抽獎期望值錯覺》。取自 https://science.km.edu.tw/exhibitions

[5]金門地區第 61 屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《發財夢！SCRATCH 隨機 VS 有跡》。取自 https://science.km.edu.tw/exhibitions

[6]《數學謎題大圖鑑》-Nweton Press

【評語】080412

研究從書籍中一個「違反直覺」的問題出發，首先探討帕隆多悖論發生的原因、接著調整各賽局的機率變項，透過 Scratch 程式模擬及 EXCEL 函數運算模擬各情況之期望值;並將遊戲 C 作適當變化(改變遊戲 A、B 的執行機率)，發現在執行遊戲 A 的機率為 41%時會有最高期望值。作者善於運用程式計算出大量資料，只可惜在數學結構性的推演論證較為不足，在有限次數下的模擬結果較難讓人信服。不過作者對於仿間店家進行訪談，並請益了相關專家學者，並試圖找出理論的相關生活應用，研究精神可嘉。

作品簡報

賠錢+賠錢=賺錢？

探討帕隆多悖論的成立條件及在多賽局中發生的可能性

壹、研究動機

在《數學謎題大圖鑑》書籍中，看到一道有趣的謎題，兩個容易賠錢的遊戲合在一起進行，卻會變成容易賺錢的遊戲，令人感到好奇，遊戲規則如下：

遊戲A-較容易賠錢的硬幣

正面機率：49.5% 獲得1元

反面機率：50.5% 損失1元

遊戲B-較容易賠錢的硬幣

財產是否為3的倍數?

是	否
正面機率：9.5% 獲得1元 反面機率：90.5% 損失1元	正面機率：74.5% 獲得1元 反面機率：25.5% 損失1元

遊戲C

每次玩會以50%的機率

隨機選擇要玩遊戲A或遊戲B

變成容易賺錢的遊戲？

目前國內缺少「帕隆多悖論的相關研究」，歷屆科展也沒有這個主題的作品，顯示此作品尚有許多空間能探討。此規則與機制造成的現象違反直覺，有許多設定及變項都值得去探討和釐清，希望我們能找出其中的奧秘，成為這項研究在臺灣的先驅。

貳、研究目的

研究一：探討帕隆多悖論發生的原因，並用數學解釋。

研究二：調整各賽局的機率變項，探討帕隆多悖論成立的條件。

研究三：探討帕隆多悖論在「三種以上賽局」一起進行時發生的可能性。

參、研究架構與方法

帕隆多悖論
容易賠錢的賽局加容易賠錢的賽局卻容易賺錢?

探討成立原因

遊戲A
賺錢機率：49.5%
賠錢機率：50.5%
較容易賠錢

遊戲B
財產為3的倍數
賺錢機率：9.5%
賠錢機率：90.5%
較容易賠錢

財產非3的倍數
賺錢機率：74.5%
賠錢機率：25.5%

執行A和B機率各50%
形成遊戲C

較容易賺錢？!

用Excel彙整資料
計算期望值

用Scratch程式
模擬大量樣本

- 各組遊戲進行300次：相同基準
- 模擬100萬次：降低誤差
- 製作期望值散佈圖：判斷趨勢線走向

探討成立條件

變項一、執行遊戲A和B之特殊組合

變項二、執行遊戲A和B之機率

變項三、遊戲A和B之賺賠機率
1.遊戲A的賺賠機率
2.遊戲B財產為3的倍數之賺賠機率
3.遊戲B財產非3的倍數之賺賠機率

歸納變項對期望值的影響
↓
何時成立？ 何時不成立？
↓
哪個變項影響最大？
↓
變項間是否有關聯？

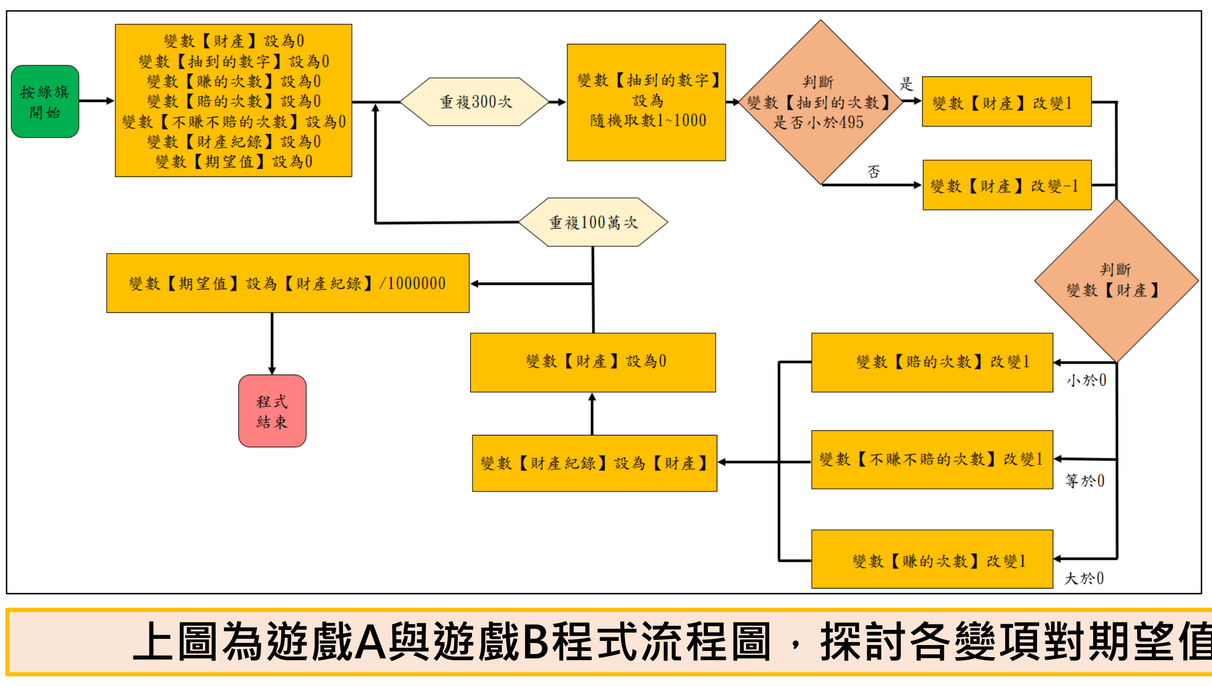
討論：三個以上賽局可能發生嗎？

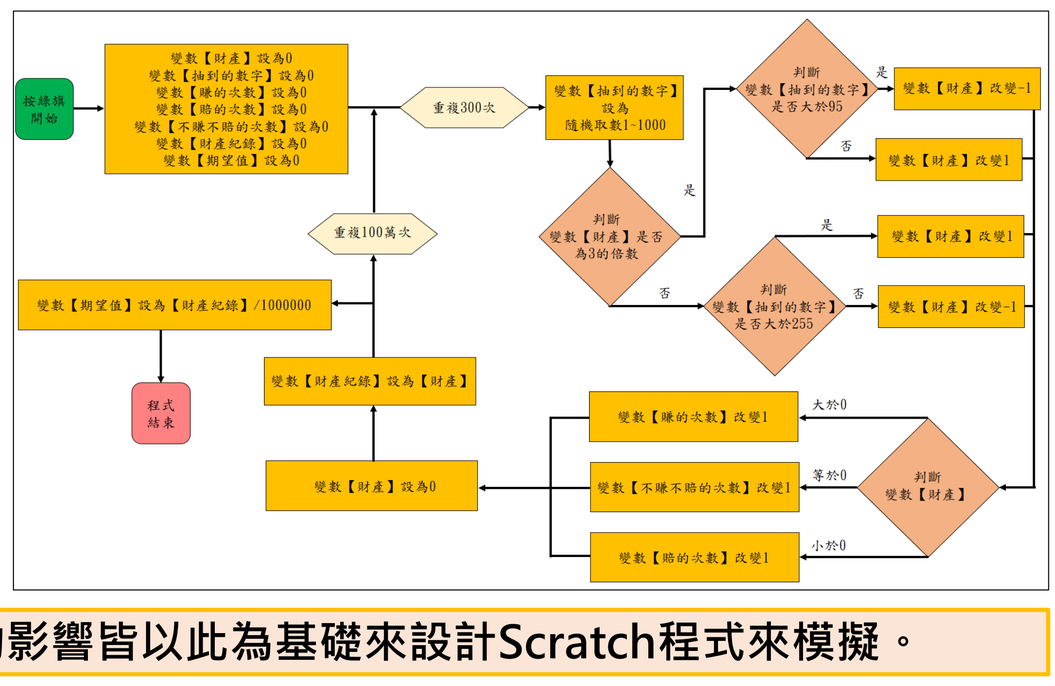
生活中的應用

市場機制的現象與經濟學

觀察現象　訪問店家　訪問專家

歸納結論





上圖為遊戲A與遊戲B程式流程圖，探討各變項對期望值的影響皆以此為基礎來設計Scratch程式來模擬。

(本張海報之遊戲規則圖、研究架構圖及程式流程圖皆由作者以PPT自行繪製；架構圖中圖示來源為Excel與Scratch應用程式之截圖)

肆、研究過程與結果

研究一、帕隆多悖論發生的原因

遊戲A：期望值為負。
遊戲B：財產從多少開始，期望值皆越來越低。
遊戲C：在財產為3的倍數時，有機率執行另一個相對賠比較少錢的規則，越玩越賺錢。

發現：會發生帕隆多悖論的現象，是因為有兩個較容易賠錢的遊戲(基本動態)，遊戲B中在財產為3倍時會進行極度容易賠錢的規則(非對稱性的開關/控制條件)。每次執行遊戲時會以50%的機率(隨機切換)選擇執行一個遊戲，長久進行下來，最後產生較容易賺錢的結果。

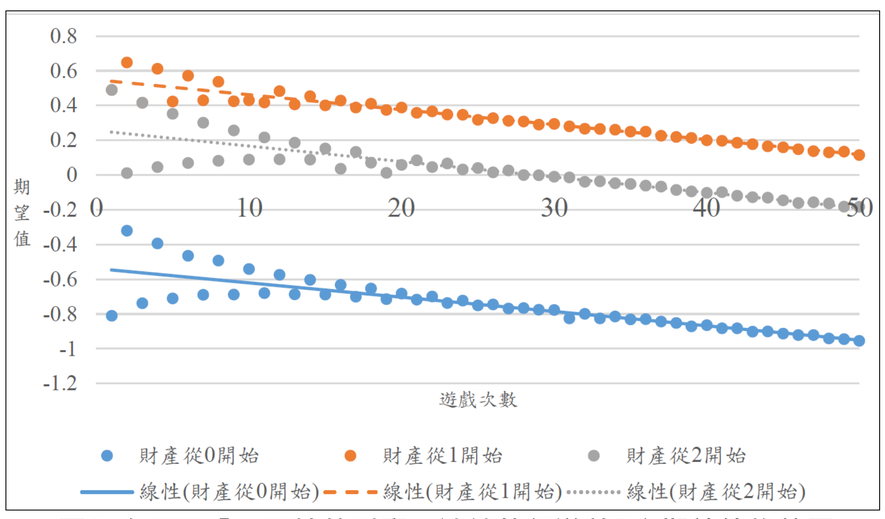


圖1 在不同「一開始的財產」連續執行遊戲B之期望值趨勢圖

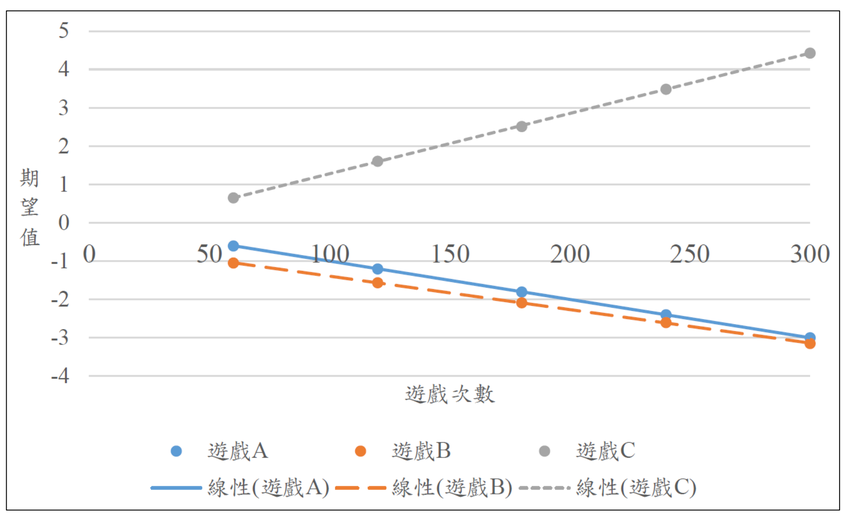


圖2 各遊戲進行60次至300次之期望值趨勢圖

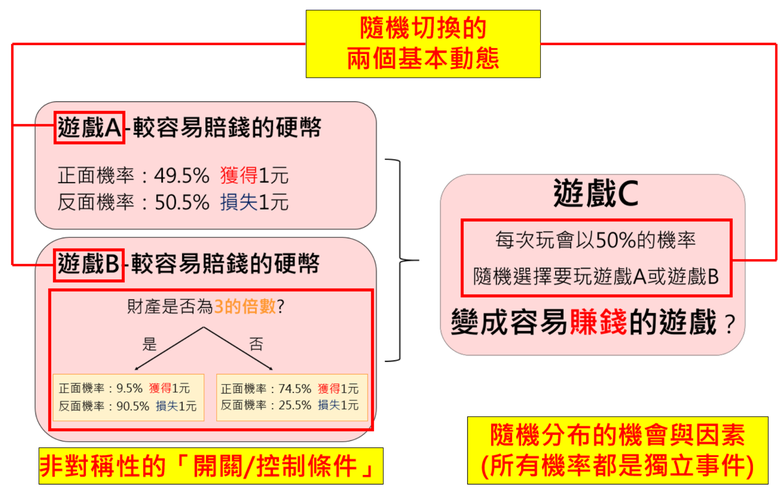


圖3 帕隆多悖論發生要素與遊戲機制對照圖

研究二、帕隆多悖論發生條件

「每次執行遊戲A和B之機率」對期望值之影響

發現：當執行遊戲A的機率為9%至84%時，符合帕隆多悖論。且當執行遊戲A的機率為41%時，期望值最高。

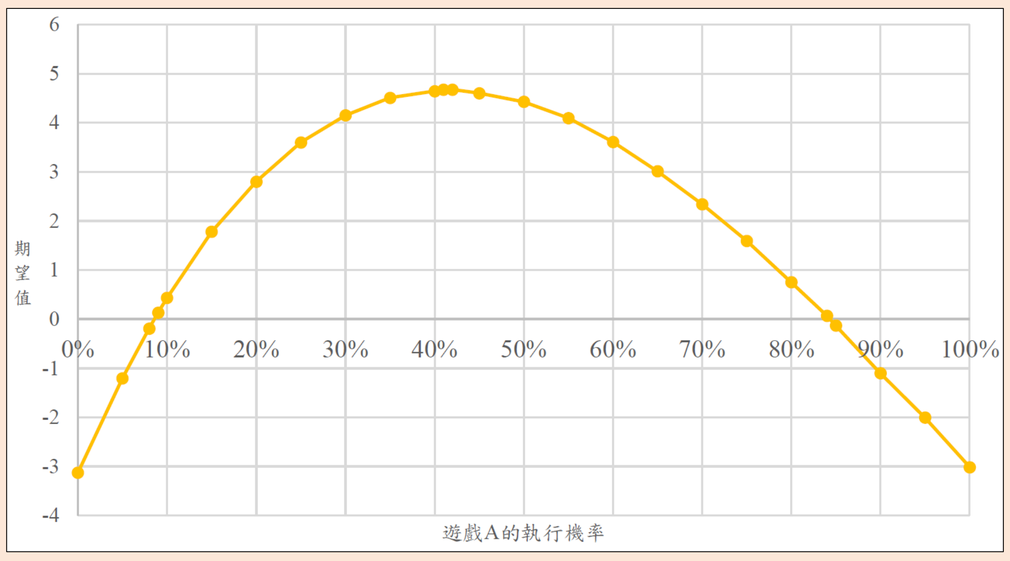


圖4 執行遊戲A的機率對期望值之影響圖

「執行遊戲A和B之特殊組合」對期望值之影響

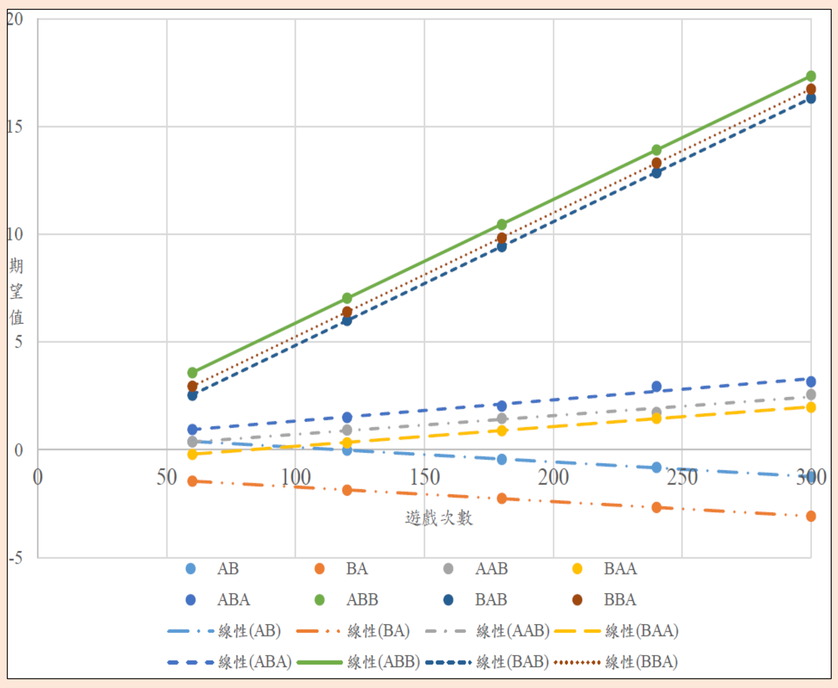


圖5 2個一組和3個一組執行60次至300次之期望值趨勢圖

發現一：2個一組的特殊組合皆容易賠錢，3個一組的特殊組合皆較容易賺錢，在特定時機避開玩遊戲B確實能增加獲利。

發現二：觀察趨勢線之傾斜程度，能發現相同進行順序 (AAB-ABA-BAA及ABB-BAB-BBA) 的組合增長趨勢相同，因此先開始的遊戲雖會影響一開始的獲利，但進行多次遊戲後，並不影響賺錢或賠錢的趨勢。

「遊戲A和B賺賠機率」對期望值之影響

表1 各規則賺賠機率範圍彙整表

	遊戲 A	遊戲 B	
		財產為 3 的倍數	財產為非 3 的倍數
規則	賺錢機率範圍： 47.9%至 49.9%	賺錢機率：9.5% 賠錢機率：90.5%	賺錢機率：74.5% 賠錢機率：25.5%
	賺錢機率：49.5% 賠錢機率：50.5%	賺錢機率範圍： 5.2%至 10.6%	賺錢機率：74.5% 賠錢機率：25.5%
	賺錢機率：49.5% 賠錢機率：50.5%	賺錢機率：9.5% 賠錢機率：90.5%	賺錢機率範圍： 72%至 75.7%

表2 調整各遊戲賺賠機率對期望值影響之彙整表

	遊戲 A 賺錢之機率	遊戲 B 財產為 3 的倍數之賺錢機率	遊戲 B 財產非 3 的倍數之賺錢機率
起始機率	49.5%	9.5%	74.5%
調整方式	向下調整 0.1%	向上調整 0.1%	向上調整 0.1%
調整範圍	49.4%至 47.9%	9.6%至 10.6%	74.6%至 75.7%
臨界機率	47.9%	10.6%	75.7%
臨界機率 之期望值	0.042762	5.618934	6.596032
每次調整 期望值變化	-0.29	0.108331455	0.180728667

發現三：4至6個一組的特殊組合數量過多，在討論中另外探究。目前發現在這些組合中僅出現少數賠錢情況，平均多進行一次遊戲都能提升獲利，奇數個一組增加之期望值高於偶數個一組之期望值。

小結：特定組合方式確實能降低「較賠錢」規則(3的倍數)造成的影響，讓遊戲越玩越賺錢，ABB組合進行300次遊戲後，有最高的期望值17.3359。在持續穩定狀態後，每組數量越多，平均多進行一次遊戲可增加之期望值也越多。

(4個以上一組之數據請參閱研究日誌)

表3 各變項對帕隆多悖論之期望值影響程度比較表

變項	執行300次遊戲之最高期望值及條件	影響程度
遊戲A與遊戲B的特殊組合	當執行遊戲組合為ABB時，期望值為17.3359。	最大
遊戲A與遊戲B的賺賠機率	遊戲B財產非3的倍數時，賺錢機率調整至75.7%，期望值為6.596032。	其次
遊戲A與遊戲B的執行機率	當遊戲A的執行機率為41%時，期望值為4.676076。	最小

歸納：「特殊組合」對期望值的影響最大。若可以在要遇到「較容易賠錢的規則」(財產為3的倍數)時，能選擇玩「相對賠比較少的規則」(遊戲A)，能有最高的期望值。特殊組合的ABB，就是利用這個原理和方式，得到最大的獲利。

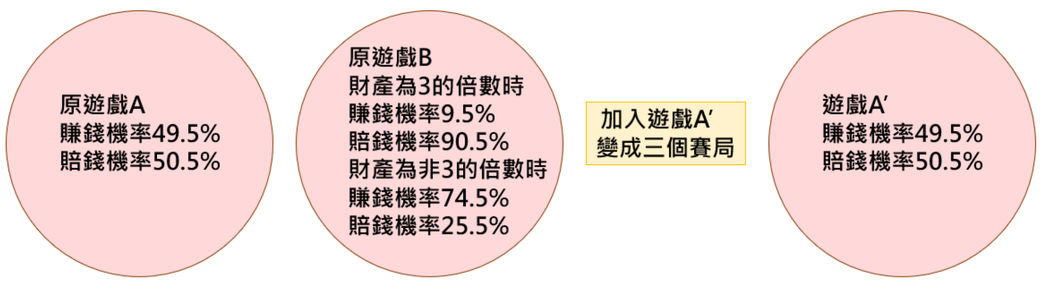
訪談專家學者結果

教授特別強調實務上時機(timing)的重要，商家在發現一些模式或規律，就會調整策略，選擇停止或繼續玩不同的遊戲。這與我們研究結果中「遊戲A與遊戲B的特殊組合對期望值影響最大」完全相同，也就是在發現遊戲B在財產為3的倍數時賠錢機率很高，換成玩遊戲A即能降低賠率，形成了ABB或BBA的執行組合，產生最高的獲利情形。

研究三、帕隆多悖論在三個以上賽局中發生之可能性

設計方式：

- 加入一個跟原始賽局相同的遊戲A或遊戲B。
- 參考原始帕隆多悖論，調整賺賠機率並用程式模擬尋找臨界值，設計會因為其他財產倍數(4、5、6、7倍)改變賺賠機率之規則。



加入A' 後，因規則與A相同，可視為執行遊戲A的機率為66.7%，在之前研究的9%至84%範圍內，故帕隆多悖論也能成立。

圖6 帕隆多悖論在三種以上賽局程立之設計方式示意圖

表4 判斷規則改為其他倍數之期望值彙整表

財產 倍數	財產是 n 的倍數		財產非 n 的倍數		進行 300 次遊戲之期望值
	賺錢機率	賠錢機率	賺錢機率	賠錢機率	
n=4	9.5%(原)	90.5%(原)	68%(臨)	32%(臨)	10.913882
	3.9%(臨)	96.1%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=5	9.5%(原)	90.5%(原)	64%(臨)	36%(臨)	15.084502
	1.6%(臨)	98.4%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=6	9.5%(原)	90.5%(原)	61.3%(臨)	38.7%(臨)	18.14499
	0.6%(臨)	99.4%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	
n=7	9.5%(原)	90.5%(原)	59.5%(臨)	40.5%(臨)	20.473002
	0.3%(臨)	99.7%(臨)	74.5%(原)	25.5%(原)	

發現：只要符合執行機率及賺賠機率的範圍，要在三種以上的賽局中發生帕隆多悖論算是非常容易。除此之外，依照「現有財產的倍數」決定賺賠機率之賽局也有很多種變化，皆能讓帕隆多悖論成立。

(本張海報圖1、圖2、圖4、圖5皆由作者以Excel自行繪製；圖3、圖6皆由作者以PPT自行繪製；表格皆以Word與Excel繪製)

伍、討論與結論

特殊組合與關鍵週期

容易賠錢組合之共同特性

(一) 遊戲交替不足2次(遊戲總次數大於6)，如：全A、全B、AAAAAAB、AAAAABB.....等。

(二) 遊戲中只有AB交替的組合，如：AB、ABAB、BABA、ABABAB.....等。

推測造成這些組合不符合帕隆多悖論的原因，是因為**交替過少，無法有效「切換基礎動態」**。而只有AB的交替組合會賠錢，讓我們推論出**單純AB的進行週期，在帕隆多悖論中會賠錢或是無法大賺**。

提高獲利與賺錢的關鍵

相較於賠錢的特性，我們更在乎如何能讓獲利最高，期望值明顯較高的組合有以下共同之特性：

(一) 以3個一組為循環進行ABB，如：ABB、BAB、BBA.....等。

(二) 組合中有ABB成分再接續進行AB，如：ABBAB、BABBA、BABABAB.....等。

(三) 避免連續執行3次遊戲B，如：在ABABBB的情況換成ABABBA。

(四) ABB是賺錢的關鍵週期，搭配AB週期交替執行，如：ABABB、ABABBABB、ABBABABABB.....等。

組合中的關鍵週期

帕隆多悖論中能賺錢的關鍵週期是ABB與AB，這兩個週期交替進行所形成的週期，都是各組合中期望值較高的情況。設n為組合內的遊戲總次數，設計方式如下：

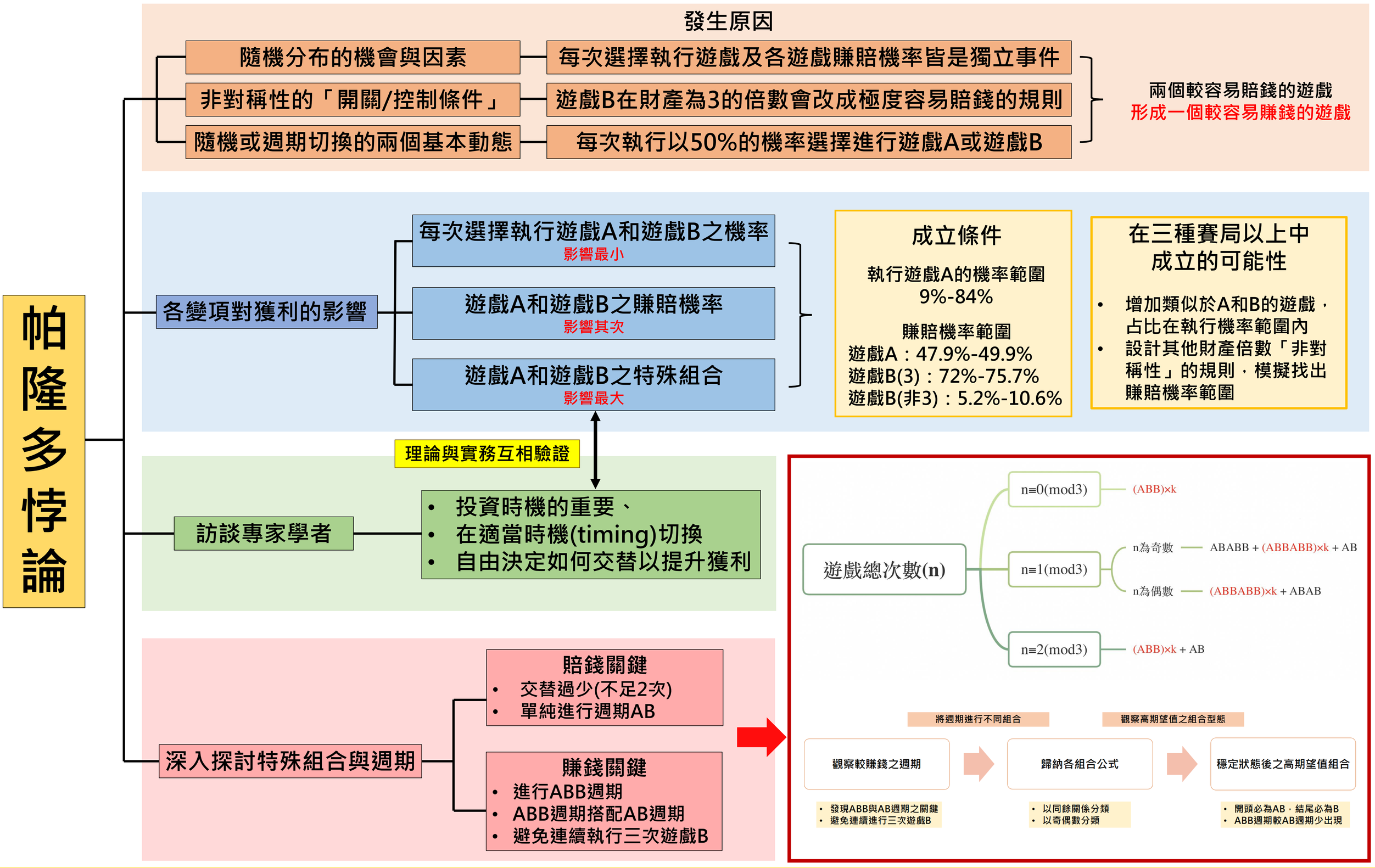
(一) 優先以ABB與AB為週期單位，放入遊戲內，且最後一個不要放遊戲A，如：n=8，遊戲組合為ABABBAB_，最後一個放入A會使獲利降低，因此會建議將最後一個週期改為ABB，形成ABABBABB。或者調整前面遊戲的週期，形成ABBABBAB。

(二) 了解設計週期的關鍵後，我們好奇使用AB週期或ABB週期的時機。依據觀察，當n>8後，先進行ABABABB，再接續進行這兩個週期的排列組合，會有較高的期望值。

依據上述兩個原則設計出之週期組合，能讓模擬出的期望值極高。雖然有時不會是該組合中最賺錢的情況，但已經非常接近最高的期望值。

研究亮點與價值

在有限的數學工具及數學知識下，我們運用程式模擬與基本的期望值觀念，觀察帕隆多悖論中不同變項對獲利造成的影響，並用大量樣本數減少誤差，**算出極接近理論值的期望值**。除此之外，發現「特殊組合」對期望值有最大的影響，歸納容易賺錢及容易賠錢的關鍵及**賺錢的週期，找出高報酬率的多樣化投資組合**。



陸、未來展望

可繼續探討：

(1)賺錢+賺錢=賠錢。

(2)跨領域的帕隆多悖論實例

優勢：

(1)解決違反直覺的現象。

(2)找出賺錢的關鍵週期。

應用：將看似劣勢的策略重新組合或調整，創造出致勝策略。

柒、參考文獻資料

[1] Parrondo’ s Paradox: new results and new ideas

[2]康軒版 五下、六下數學課本。

[3]賠錢+賠錢=賺錢？——帕隆多悖論 【譯人說書】#13 數學謎題大圖鑑-2

[4]中華民國第 63屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《你比多少人幸運？以機率累積函數破解抽獎期望值錯覺》。

[5]金門地區第 61屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《發財夢！SCRATCH隨機 VS有跡》。

[6]《數學謎題大圖鑑》

(本張海報之結論圖由作者以PPT及gitmind自行繪製；未來展望之圖片由作者以gitmind自行繪製)